FACULDADE DE TECNOLOGIA SENAI CIMATEC
MESTRADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL E
TECONOLOGIA INDUSTRIAL

CARLOS ALBERTO ORGE PINHEIRO

SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS COM BASE NO RETORNO ESPERADO E SEMIVARIÂNCIA ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO POR METAS

Salvador
2009

CARLOS ALBERTO ORGE PINHEIRO

SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS COM BASE NO RETORNO ESPERADO E SEMIVARIÂNCIA ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO POR METAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação da Faculdade de Tecnologia Senai Cimatec, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial.

Área de Concentração: Sistemas Complexos

Orientador: Professor Dr. Valter de Senna

Salvador
2009

CARLOS ALBERTO ORGE PINHEIRO

SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS COM BASE NO RETORNO ESPERADO E SEMIVARIÂNCIA ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO POR METAS

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de
Mestre em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial do Programa de Pós-graduação da Faculdade de Tecnologia Industrial Senai Cimatec,
sendo aprovada em sua forma final.

Prof. Dr. Valter de Senna – Orientador

Prof. Dr. Marcelo A. Moret S. Gonçalves – Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Valter de Senna – Presidente

Prof. Dr. Annibal Parracho Sant´Anna

Prof. Dr. Pablo Vaveliuk

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alberto Matsumoto, pela competência e importante contribuição no desenvolvimento deste trabalho, bem como nos inúmeros artigos científicos realizados em parceria.

Ao Prof. Dr. Valter Senna pelo trabalho de orientação desta pesquisa.

A Professora Denise Ribeiro, pelo inestimável apoio dado.

A Carlos Baumgarten e José Grimaldo pelo trabalho em relação às informações prestadas.

Aos meus pais que sempre acreditaram neste projeto.

A minha querida esposa, sempre compreensiva sobre minha ausência. De sua parte agradeço o apoio dado e aos cuidados com nossa filha, quando estive ausente.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram neste trabalho.

A Deus, por permitir que essas pessoas estivessem sempre comigo.

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

AMBV4 – Código da ação preferencial da Companhia de Bebidas das Américas

BBDC4 – Código da ação preferencial do Banco Bradesco S.A

BOVESPA – Bolsa de Valores de São Paulo

BRKM5 – Código da ação preferencial da Braskem S.A

BRTO4 – Código da ação preferencial da Brasil Telecom Participações S.A

CGAS5 – Código da ação preferencial da Companhia de Gás de São Paulo

CLSC6 – Código da ação preferencial das Centrais Elétricas de Santa Catarina S.A

CMIG4 – Código da ação preferencial da Companhia Energética de Minas Gerais

CPLE6 – Código da ação preferencial da Companhia Paranaense de Energia

CSNA4 – Código da ação preferencial da Companhia Siderúrgica Nacional

CVM – Comissão de Valores Mobiliários

ELET6 – Código da ação preferencial da Centrais Elétricas Brasileiras S.A

GGBR4 – Código da ação preferencial da Gerdau S.A

IBOVESPA – Índice da Bolsa de Valores de São Paulo

IPO – Initial public offering

ITAU4 – Código da ação preferencial do Banco Itaú S.A

LINGO – Linear, Interactive and General Optimizer

LMC – Linha do Mercado de Capitais

PETR4 – Código da ação preferencial da Petrobrás S.A

TCSL4 – Código da ação preferencial da TIM Participações S.A

TLPP4 – Código da ação preferencial da Telecomunicações de São Paulo S.A

TNLP4 – Código da ação preferencial da Telemar S.A

TRPL4 – Código da ação preferencial da Companhia de Transmissão de Energia Elétrica Paulista

UBBR4 – Código da ação preferencial da União de Banco Brasileiros S.A

USIM5 – Código da ação preferencial da Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais S.A

VALE5 – Código da ação preferencial da Companhia Vale do Rio Doce

Lista de simbolos

r_t	retorno no período t
P_t	preço da ação no instante t
P_{t-1}	preço da ação no instante $t-1$
D_t	dividendo pago no instante t
D_{t-1}	dividendo pago no instante $t-1$
ln	logaritmo neperiano
r_p	retorno esperado do portfólio
$r_{p,t}$	retorno esperado do portfólio no instante t
$e = 2,71828...$	número neperiano
p_s	probabilidade do estado s
r_s	retorno no estado s
i	ação ou ativo
μ_i	retorno médio da ação i
x_i	participação percentual da ação i
σ_i^2	variância da i-ésima ação
σ_i	desvio-padrão da i-ésima ação
σ_{ij}	covariância entre as ações i e j
σ_p^2	variância do portfólio
ρ_{ij}	coeficiente de correlação entre as ações i e j
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	somatório da participação percentual da ação i
X	matriz dos valores percentuais das ações
X^T	matriz transposta das participações percentuais das ações
R	matriz dos retornos esperados das ações
V	matriz da variância das ações
r_f	retorno do ativo livre de risco

I^T	vetor transposto de $1\acute{}s$
$\Re$	conjunto dos números reais
x_{n+1}	participação percentual do ativo livre de risco
σ_i^3	terceiro momento estatístico
$\sigma_{i,j,k}^3$	co-terceiro momento estatístico para ações i, j e k
g_1	coeficiente de assimetria
E	valor esperado para assimetria
$\otimes$	produto de Kronecker
Z_1^*	valor máximo da função objetivo retorno esperado
Z_2^*	valor máximo da função objetivo variância ou semivariância
Z_3^*	valor máximo da função objetivo terceiro momento
Z_i^*	valor máximo da função objetivo i
Z_i	valor da função objetivo i
d_i	desvio entre Z_i^* e Z_i
α e β	preferências do investidor
S_i^2	semivariância da ação i
$S_{ij,B}$	cosemivariância para ações i e j, em relação ao alvo B
S_p^2	semivariância do portfólio
SV	matriz de semivariância
$f_i(X)$	função sob o espaço de decisão X
$g(X)$	função restrição sob o espaço de decisão X
$\forall i$	qualquer que seja i
$\exists i$	existe i
$h_j(X)$	função restrição sob o espaço de decisão X
$h_k(X)$	função restrição sob o espaço de decisão X
$g_i(X)$	função restrição sob o espaço de decisão X
$g_j(X)$	função restrição sob o espaço de decisão X
d_i^+ e d_j^+	desvios positivos em relação a meta

p, k	preferência do tomador de decisão
b_i	meta definida para a função $f_i(X)$
b_j	meta definida para a função $f_j(X)$
$\frac{\partial f}{\partial y}$	derivada parcial da função $f(X)$ em função de y
$\nabla_Y f$	gradiente do vetor das derivadas parciais da função $f(X)$ em função de y
$\frac{\partial f}{\partial z}$	derivada parcial da função $f(X)$ em função de z
$\nabla_Z f$	gradiente do vetor das derivadas parciais da função $f(X)$ em função de z
$\nabla_Y^T f$	gradiente do vetor transposto das derivadas parciais da função $f(X)$ em função de y
$\nabla_Y^T f$	gradiente do vetor transposto das derivadas parciais da função $f(X)$ em função de z
$\frac{\partial g}{\partial y}$	derivada parcial da função restrição $g(X)$ em função de y
$\frac{\partial g}{\partial z}$	derivada parcial da função restrição $g(X)$ em função de z
G_R	gradiente reduzido generalizado

Resumo

Nesta pesquisa é apresentada uma contribuição para os problemas de seleção de portfólios, considerando as preferências do investidor em relação ao retorno e a semivariância. Entende-se como seleção de portfólios a otimização do capital alocado entre diferentes ações. A motivação da pesquisa dá-se pela existência de algumas críticas na teoria de seleção de portfólios, sobre o uso da variância. Esta pesquisa é exploratória qualitativa ao ocupar-se do uso da semivariância, conforme Estrada (2008), ao modelo de programação por metas utilizado por Lai (1991). Ao verificar seus resultados, de acordo com as preferências dos investidores, a pesquisa torna-se empírico-analítica. As variáveis independentes representam os preços das ações cotados em bolsa, o horizonte de tempo, o nível desejado de retorno e o risco. As variáveis dependentes são representadas pelas participações percentuais das ações nos portfólios formados. Para formar esses portfólios o problema de otimização procura maximizar o valor do retorno esperado além do inverso da semivariância. Tal modelagem acaba constituindo-se num problema multiobjetivo, definido através da programação por metas, em duas etapas. Na primeira etapa, o método do gradiente reduzido generalizado é usado para tratar a maximização das funções objetivo retorno esperado e inverso da semivariância. Na segunda etapa, também é usado para a minimização dos desvios obtidos entre os valores da primeira etapa com os valores da segunda etapa. Para atender aos objetivos da pesquisa o modelo proposto foi utilizado no ano de 2007 por dois diferentes grupos de dez ações pertencentes aos portfólios teóricos da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Em seguida os resultados obtidos foram comparados, sob duas diferentes preferências, aos resultados obtidos pelos modelos de seleção baseados na programação por metas e propostos por Markowitz (1952) e Lai (1991). As preferências por retorno e assimetria, retorno e semivariância como retorno e variância, nessa ordem, apresentaram o maior retorno e assimetria, para o período de 2007, nos grupos 1 e 2 de ações.

Palavras-chave: Portfólios, Semivariância, Pesquisa Operacional.

Abstract

This research presents contribution to the problems of, considering the preferences of the investor relating to the return and the semivariance. Selection of portfolios is known as the optimization of the capital allocated in different stocks. The motivation of the research is given by the existence of some criticism in the theory of selection of portfolios, about the use of the variance. This research is exploratory and qualitative once it is concerned with the use of semivariance, according to Estrada (2008), the model of programming by goals used by Lai (1991). Checking the results, according to the investors' preferences, the research becomes empiric-analytic. The independent variables represent the prices of the stocks in the market, the horizon of time, the desired level of return and the risk. The dependent variables are represented by the percentage participation of the stocks in the formed portfolios. To form these portfolios the problem of optimization try to maximize the value of return wanted besides the inverse of the semivariance. Such modeling ends up in a multi-objective problem, defined by the programming by scopes, in two stages. In the first stage, the method of the reduced and generalized gradient is used to deal with the maximization of the functions objective return desired and inverse of the semivariance. On the second step, it is also used to the minimization of the deviations between the values of the first step and the values of the second one. To reach the goals of the research the proposed model was used in 2007 by two different stock groups pertaining to the theoretical portfolios of São Paulo Stock Market (BOVESPA). Then the results were compared, under two differen t preferences, with the results obtained from the models of selection based in the programming for scopes and proposed by Markowitz (1952) e Lai (1991). The preferences for return and skewness, return and semivariance as return and variance, in this order, present higher return and skewness, for the year of 2007, in the groups 1 and 2 of stocks.

Keywords: Portfolios, semivariance, Operational Research.

Sumário

1. Introdução

Esta dissertação é motivada pela existência de algumas críticas na teoria de alocação de capital, também denominada de seleção de portfólios, sobre o uso do segundo momento estatístico, definido pela variância. No modelo de seleção de portfólio, proposto por Markowitz (1952), são usados respectivamente, os retornos médios e as variâncias dos retornos das ações para derivar a fronteira eficiente. Nela, cada portfólio maximiza o retorno esperado para uma dada variância ou minimiza a variância para um dado retorno esperado.

Acontece que os investidores estão interessados em minimizar riscos de perdas porque os retornos das ações podem não estar distribuídos normalmente. Com isso, a variância, como medida de risco, é útil aos investidores na tomada de decisões quando a distribuição dos retornos das ações é simétrica. O próprio Markowitz (1959, apud Nawrocki, 1999, p.10) forneceu, para as pesquisas em Finanças, duas sugestões para a semivariância. A primeira é computada em relação ao retorno médio e a segunda em relação ao retorno alvo.

Assim, ao contrário da variância, que interpreta qualquer diferença do retorno médio, acima ou abaixo, como indesejada, é possível descrever o risco abaixo do retorno médio ou do retorno alvo, em termos de tolerância ao risco, o que não acontece no modelo de seleção de portfólios de média-variância proposto por Markowitz (1952). Além disso, o modelo assume que a distribuição dos retornos assemelha-se a uma curva normal. No entanto, tal comportamento nem sempre acontece com os retornos das ações.

Percebendo a limitação do seu modelo de seleção de portfólios, Markowitz (1991) chegou a propor o uso da semivariância como uma medida de risco alternativa e preferível. Mesmo apresentando essas desvantagens, o uso da variância por mais de 50 anos deve-se ao fato de que a medida é familiar e conveniente em relação ao cálculo.

Não tendo a intenção de utilizar as sugestões existentes por outras aproximações, uma vez que todas elas são úteis, o uso da semivariância é indicado para aqueles investidores que desejam minimizar riscos de perdas. Para isso, será necessário a geração de uma matriz para a cosemivariância, permitindo que a mesma possa ser usada da mesma forma que a matriz de covariância é utilizada na seleção de portfólios de média-variância.

Além da definição de tolerância ao risco, investidores também estão sujeitos a retornos de ações com distribuições assimétricas. Para estas situações, Lai (1991) incorporou para seleção dos portfólios a assimetria. Alguns trabalhos posteriores a exemplo de Chunhachinda et al (1997), Prakash et al. (2003) e Sun e Yan (2003) também aplicaram a assimetria, no entanto, mantiveram o uso da variância.

1.1. Objetivos e justificativa da pesquisa

Como existem algumas criticas ao uso da variância, o objetivo primário desta dissertação é o de utilizar a semivariância, num modelo de programação por metas, para a seleção de portfólios. Os objetivos secundários são: i) examinar se os portfólios eficientes da pesquisa proposta exibem assimetria e ii) verificar os resultados dos portfólios da pesquisa proposta, com base nas preferências dos investidores, em relação aos resultados dos modelos de seleção propostos por Markowitz (1952) e Lai (1991), também baseados num modelo de programação por metas.

Para este último objetivo, a implementação do modelo deve ser feita de forma que os portfólios sejam revisados mensalmente. Então, o desejo de utilizar a semivariância, visa não somente ilustrar a discussão de melhorias nos modelos de seleção de portfólios, mas, caso confirmada a contribuição da semivariância, ser útil para que investidores pessoas físicas, conforme suas preferências em relação ao retorno esperado e semivariância possam definir seus portfólios.

Fatores como a estabilidade da moeda, queda da taxa de juros e melhoras na produção industrial acabaram estimulando a participação das pessoas físicas no mercado de ações. No entanto, a definição da volatilidade dos retornos das ações conjuntas para esse tipo de investidor é complexa, uma vez que não se resume a média ponderada da volatilidade dos retornos individuais das ações.

Caso o investidor tenha a sua disposição um modelo para definição adequada dos valores a serem investidos em cada ação, mensalmente, o mesmo poderá adequar suas preferências em relação ao retorno esperado e a semivariância, reduzindo o risco de seu portfólio. Por isso, justifica-se a definição de um modelo, que possa auxiliar os investidores não profissionais, na seleção dos seus portfólios.

1.2. Metodologia e premissas adotadas

Para o modelo proposto, a seleção dos portfólios com base nas preferências por retorno esperado e semivariância é modelada segundo um problema de programação por metas. Sujeito à condição de que não são permitidas vendas a descoberto nem empréstimos à taxa livre de risco e que as aplicações estão sujeitas ao patrimônio total do investidor, o problema de programação por metas procura: a) maximizar o valor do retorno esperado, cuja função objetivo é definida pela soma dos produtos entre os retornos esperados das ações e suas participações percentuais e b) maximizar o inverso da semivariância, cuja função objetivo é definida pelo inverso da soma dos produtos entre as participações percentuais e as variâncias e covariâncias dos retornos das ações.

O problema ao buscar uma solução para objetivos distintos e, talvez conflitantes, acaba sendo solucionado pela programação por metas, proposta em duas etapas. Na primeira etapa, o método do gradiente reduzido generalizado será usado para tratar a maximização das funções objetivo inverso da semivariância e retorno esperado, sob as restrições impostas. Na segunda etapa, o gradiente será também usado para a minimização dos desvios obtidos entre os valores obtidos na primeira etapa com os valores a serem obtidos na segunda etapa, ao aplicar o método de programação por metas.

Mesmo não sendo uma proposição de um novo modelo de alocação de capital em tempo discreto, o modelo desta dissertação representa uma evolução dos modelos de seleção de portfólios anteriores. Para Richardson (1999) a pesquisa exploratória procura conhecer as características de um fenômeno para procurar explicações das causas e conseqüências do mesmo. Desta maneira, a pesquisa acaba sendo considerada como exploratória qualitativa que, em princípio, não requer obtenção de dados numéricos.

Em relação à pesquisa, o problema de seleção de portfólios será estudado com a premissa de que o tempo é discreto. As demais premissas simplificadoras são dadas abaixo:

a) O investidor é racional ao preferir maior retorno e menor risco; b) Não existem custos de transação; c) A participação percentual das ações nos portfólios não pode ser negativa; d) Existe probabilidade de que o retorno de uma ação seja menor ou igual a zero; e) Existe uma dependência estatística entre os retornos das ações em cada período; f) O tempo é discreto; g) Não podem ser tomados empréstimos com base no ativo livre de risco; h) As distribuições dos retornos das ações são independentes e identicamente distribuídas no tempo.

As variáveis independentes representam os preços das ações cotadas em bolsa. Com base neles os retornos são obtidos. O horizonte de tempo do investidor, o nível desejado de retorno esperado e de risco também são variáveis independentes. As variáveis dependentes são as participações percentuais das ações nos portfólios que podem ser formados. Os portfólios ótimos são aqueles com o maior nível de retorno esperado e menor risco, sujeitos as premissas simplificadoras.

Como é possível a existência de mais de uma solução, uma vez que as preferências dos investidores em relação ao retorno esperado e a semivariância são consideradas no modelo de seleção proposto, a estimação de estados não estará focando seus esforços somente na obtenção de uma solução, mas na obtenção de soluções possíveis, conforme sejam essas preferências.

Em seguida à pesquisa exploratória qualitativa, procedimentos estatísticos realizados para produzir inferências sobre a população-objeto e sobre os resultados obtidos pela pesquisa de seleção de portfólios proposta dão um caráter quantitativo. Desta maneira, a pesquisa ganha uma conotação do tipo empírico-analítica. Para Martins (1994, p.26) esse tipo de pesquisa faz uso de técnicas de coleta, tratamento e análise de dados, de maneira quantitativa. Alem do mais, há uma preocupação causal entre as variáveis em análise e os graus de significância das definições.

1.3. Organização da dissertação

No capitulo dois é realizada uma revisão sobre a economia e o surgimento do mercado de capitais além do papel das bolsas de valores no Brasil. Em seguida, os índices que representam os rendimentos obtidos em aplicações com ações, os mercados onde são comercializadas as ações e os tipos de ações, são explicados. Por fim, é mostrado o crescimento do número de investidores não profissionais que compram ações no Brasil, além das dificuldades que encontram na composição dos seus portfólios.

No capítulo três, a partir da análise dos conceitos de retorno esperado e variância é definida a formação dos portfólios de ações. A partir da combinação de duas ações e na extensão para diversas ações, que acabam representando possíveis portfólios de ações, a fronteira eficiente é explicada. Também é explica a fronteira eficiente com base na utilização do ativo livre de risco e na possibilidade de vendas a descoberto.

O capítulo quatro apresenta o modelo de média-variância-assimetria de Lai (1991). A partir das demonstrações anteriores e da incorporação da assimetria a formação dos portfólios de ações é analisada. Em seguida, com base na combinação de ações, na possibilidade de empréstimos com base na taxa livre de risco e de vendas a descoberto, a definição do modelo de média-variância-assimetria é explicada sob a condição da variância unitária.

No capitulo cinco, a partir do conceito da cosemivariância e da importância da diversificação para seleção de portfólios, a semivariância em relação ao retorno alvo é demonstrada. Em seguida, é explicado porque a seleção de ações, buscando a minimização da semivariância, coloca-se em nível de superioridade em relação à seleção de portfólios que faz uso da variância. Por fim, é apresentado o modelo proposto de seleção de portfólios para a pesquisa, sob a proibição de vendas a descoberto e de empréstimos à taxa livre de risco.

No capítulo seis é apresentado o método de programação multiobjetivo. Em seguida, o método de programação por metas, que faz uso de pesos para as preferências do tomador de decisão, tem sua resolução definida em duas etapas. Através deste método os problemas de programação multiobjetivo são solucionados. Como uma função objetivo, definida pelo modelo de seleção proposto, é do tipo não linear, os conceitos da programação não linear com restrições não lineares, são explicados.

No capítulo sete o desempenho da seleção de portfólios, com base no modelo proposto é verificado. Para isso, foram utilizados dois grupos de dez ações pertencentes aos portfólios teóricos da Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA). Para finalizar, os resultados da pesquisa, as conclusões obtidas, as contribuições, além dos comentários e das limitações e sugestões para próximos trabalhos são expostos.

Para esclarecimentos, o conceito e o algoritmo do gradiente reduzido generalizado são definidos no Anexo A, desta dissertação. Já a implementação dos modelos através do Lingo é demonstrada no Anexo B. Nos Anexos C e D estão disponíveis o retorno médio, a variância, o terceiro momento e a semivariância, das ações dos grupos 1 e 2, respectivamente. No Anexo E estão disponíveis os resultados obtidos para os modelos de seleção de portfólios, considerando que os portfólios foram formados no ano de 2008. Os retornos das ações e as matrizes utilizadas pelos modelos de seleção estão disponíveis no CD ROM que acompanha esta dissertação.

2. O mercado de capitais e o investidor não profissional

O mercado financeiro é definido como o ambiente através do qual é possível o intercâmbio dos recursos financeiros, conforme Pinheiro (2007, p.74). Em função das suas características e tipos de operações pode ser classificado como mercado de crédito, de capitais, monetário e de câmbio. Os dois primeiros permitem que as empresas possam tomar recursos para suas necessidades de curto e longo prazo, respectivamente. Já o mercado monetário e de câmbio representam, nessa ordem, o mercado que controla o volume de moeda em circulação numa economia e o fluxo de entrada e saída de moeda nacional e estrangeira.

Para Galvão et al (2006, p.91) o mercado de crédito é o conjunto de transações realizadas pelos agentes econômicos e que envolvem o risco do crédito, ou seja, está relacionado com a condição de pagamento do empréstimo.

Já o mercado de capitais pode ser definido como um conjunto de instituições que negociam títulos de dívida e patrimônio objetivando a canalização dos recursos financeiros dos agentes econômicos na realização das operações de compra e de venda. Ou seja, o mercado de capitais representa um sistema de distribuição de valores mobiliários com o propósito de viabilizar a capitalização das empresas que necessitam de recursos e, ao mesmo tempo, permitir que esses títulos emitidos tenham liquidez.

A economia de um país necessita de recursos financeiros para promover o crescimento e desenvolvimento econômico. Para que haja expansão é preciso que as empresas façam investimentos para acumulação de capital e aumentem sua produtividade. Não há dúvida, portanto, que os investimentos realizados na economia são considerados fundamentais para o crescimento econômico.

O surgimento do mercado de capitais no Brasil ocorreu quando o mercado de crédito, destinado a operações de empréstimos, deixou de atender às necessidades da atividade produtiva, no sentido de disponibilizar os recursos nas condições adequadas com relação ao prazo, custos e exigibilidades. As empresas tiveram que promover a sua abertura de capital, ou seja, atendendo alguns requisitos legais as empresas transformaram-se em sociedades anônimas para terem acesso ao mercado de capitais, evitando, assim, o aumento do nível de endividamento.

De acordo com o crescimento econômico, as empresas em algum momento irão necessitar de recursos para financiar seus projetos de expansão. Ainda que o retorno oferecido pelo projeto seja superior ao custo do empréstimo no mercado de crédito, o risco do negócio recomenda a existência de um balanceamento entre o financiamento do projeto com recursos próprios e recursos de terceiros, conforme Brealey e Myers (1998, p.447).

Esses recursos são obtidos através das debêntures, das notas promissórias comerciais, dos certificados de depósitos de valores mobiliários, dos direitos de subscrições, das cotas de fundos imobiliários, dos contratos futuros e de opções além da emissão de ações, conforme Galvão et al (2006, p.234).

Portanto, o mercado de capitais é fundamental para o crescimento econômico do país por aumentar as alternativas de financiamento para as sociedades anônimas, permitir a redução do custo global do financiamento, diversificar e distribuir os riscos inerentes a operação de investimento e democratizar o acesso ao mercado de capitais, principalmente às pessoas físicas que desejam realizar investimentos.

2.1. O papel da bolsa de valores

A menor parcela do capital de uma empresa, definida pelo termo ações, é comercializada através das bolsas de valores. O mercado está disponível a todos que buscam a comercialização desses títulos patrimoniais daquelas empresas admitidas à negociação. Ou seja, as transações são asseguradas jurídica e economicamente, em razão da regulamentação existente.

Conforme Pinheiro (2007, p.176), a bolsa de valores visa à livre concorrência e pluralidade entre os investidores e de instituições credenciadas, a exemplo das corretoras de valores, de forma que nenhum deles tenha uma posição de domínio no mercado. O produto negociado é homogêneo e deve existir transparência na definição dos preços.

Com base nesses requisitos a bolsa de valores deve: facilitar o intercâmbio entre os investidores e as sociedades anônimas; proporcionar liquidez às operações realizadas, permitindo que o investidor possa vender suas ações quando necessário; fixar o preço das ações de acordo com a lei econômica de oferta e demanda; fornecer informações sobre as empresas listadas na bolsa além de divulgar seus preços e quantidades negociadas.

2.1.1. Os índices de ações das bolsas de valores

Os índices de ações são representados por números índices temporais e ponderados pelo volume de negócios realizados. Quando as bolsas divulgam esses índices o maior objetivo é o de medir a lucratividade média de um portfólio consolidado de diversas ações, num intervalo de tempo. Por tratar-se de um valor numérico equivalente à média das cotações de certas ações, consideradas representativas do mercado em determinado momento, os índices de ações indicam a variação de preços P utilizados para o acompanhamento dessas ações negociadas em bolsa.

Pela comparação dos índices de ações, apurados sucessivamente pela bolsa de valores, os investidores poderão saber se o mercado de ações está em alta, encontra-se estável ou está em baixa. O acompanhamento do índice pode ser feito em períodos mensais, semanais ou diários, conforme a necessidade.

Para que um índice de ação possa representar adequadamente o retorno do portfólio, deve ser composto de um suposto portfólio de ações que represente adequadamente o comportamento do mercado. No Brasil existem alguns índices de ações. O Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (IBOVESPA) é o mais tradicional.

2.1.1.1. Índice da bolsa de valores de São Paulo

O IBOVESPA representa o valor atual em moeda do país de um portfólio teórico de ações, com base numa aplicação hipotética, procurando aproximar-se da configuração real das negociações à vista, em lotes padrões, na BOVESPA. O IBOVESPA pode ser considerado como um índice do mercado de ações r_M , uma vez que sua metodologia prevê a aplicação dos ganhos auferidos pelo investidor nesse mercado.

Algumas críticas quanto ao índice de ações ocorrem em razão da concentração em poucas ações. Pinheiro (2007, p.200) explica que cerca de 10 ações conseguem representar até 50% do volume negociado no mercado, o que é um indicador da alta concentração em sua composição.

O portfólio teórico do IBOVESPA é composto pelas ações que tiveram, nos últimos 12 meses, o maior índice de negociação, representado pelo número de operações de compra ou venda da ação. O critério de seleção é feito com base na negociabilidade das ações no mercado à vista, daquelas empresas que estiveram, no mínimo, presentes em 80% das negociações. Para que a representatividade do índice se mantenha, quadrimestralmente é feita uma nova avaliação com base nos 12 meses anteriores, para identificar alterações na participação de cada ação.

2.2. O Mercado primário e o mercado secundário

Em relação à comercialização de ações, o mercado de capitais pode ser dividido em mercado primário e o secundário. O principal objetivo do mercado primário é o da capitalização do emissor. Neste mercado é feita a primeira oferta pública das ações, definida pelo mercado *Initial public offering* (IPO) para que as sociedades anônimas possam obter recursos para expansão dos seus negócios.

Agora, quando o principal objetivo é permitir a liquidez, a comercialização dos títulos emitidos inicialmente no mercado primário, será feita no mercado secundário. Então, a relação será entre investidores e não conta com a participação da sociedade anônima. Essas operações são realizadas através das bolsas de valores. No Brasil, em razão do elevado volume de negócios realizados e da presença nas operações de compra ou venda, algumas ações são consideradas como ações de primeira linha.

Podemos concluir, conforme Pinheiro (2007, p.173) que a função do mercado secundário é dar liquidez as ações, permitindo que, no momento da realização de uma operação de venda, exista um comprador apto. Este processo, inclusive, será responsável por viabilizar o crescimento do mercado primário e a conseqüente capitalização das sociedades anônimas através da emissão de ações.

As ações podem ser definidas como títulos de renda variável, emitidos pelas sociedades anônimas. Quando o investidor decide-se pela compra de ações o mesmo assume uma série de direitos e responsabilidades. Bodie et al (2000, p.58) explicam que os investidores, quando adquirem ações de uma sociedade anônima têm uma única obrigação: integralizar sua parte do capital, conforme subscrição. Ao mesmo tempo, adquirem uma série de direitos, conforme seja a ação do tipo preferencial ou ordinária.

2.2.1. Ações preferenciais

Essas ações apresentam como característica fundamental a prioridade, em relação às ações ordinárias, no recebimento dos dividendos e, caso ocorra a dissolução da sociedade, no direito de receber sua parte. Durante sua emissão podem existir classes de ações preferenciais, com valores diferenciados de dividendos ou proventos especiais para cada classe, conforme definições apresentadas no Estatuto da sociedade anônima.

As ações preferenciais apresentam o número quatro após o seu código. Já os números cinco, seis e sete representam as ações preferenciais classes, A, B e C. Assim, PETR4, USIM5, ELET6 e CELP7 representam o código das ações preferenciais da Petrobrás S.A, das ações preferenciais classe A da Usinas Siderúrgicas de Minas S.A, das ações preferências classe B das Centrais Elétricas Brasileiras S.A e das ações preferenciais classe C das Centrais Elétricas do Pará S.A, nessa ordem.

2.2.2. Ações ordinárias

Essas ações têm como principal característica o direito ao voto. Nas sociedades anônimas é através do voto que o investidor adquire o direito legal de controle da organização. Assim, nas assembléias gerais ou nas convocações especiais o investidor participa com seu voto, sendo que o peso do mesmo está associado à quantidade de ações que possui. Esta é a maneira pela qual o investidor poderá participar das decisões empresariais, da gestão dos lucros e riscos da sociedade. As ações ordinárias apresentam o número três após o seu código. Por exemplo, PETR3 representa o código das ações ordinárias da Petrobras S.A.

No Brasil, o número de ações preferenciais sem direito a voto, ou seja, sujeitas restrição no exercício deste direito, teve seu limite alterado em relação ao total das ações emitidas. Galvão et al (2006, p.250) explica que com a promulgação da nova Lei das S.As, em 31 de outubro de 2001, a composição do capital social passou a ser definido na proporção de 1:1, ou com no mínimo 50% de ações ordinárias.

2.2.3. O valor nominal e o valor de mercado de uma ação

O valor de uma ação geralmente faz referência ao seu preço na bolsa de valores. Em algumas situações é comum o uso do termo valor nominal. Este se refere ao valor da ação estabelecido em estatuto pela sociedade anônima. Ou seja, o valor nominal corresponde ao capital dividido pelo número de ações emitidas. Acontece que, conforme circunstâncias favoráveis ao desempenho da empresa, os investidores aceitam pagar um preço superior ao valor nominal. Este é o conceito de valor de mercado e define a cotação da ação.

2.2.4. Os ganhos obtidos com ações

As ações apresentam valorização e rendimentos, sendo este último definido pelos benefícios propiciados aos investidores sob a forma de dividendos D e bonificações, além dos direitos de preferência na aquisição de novas ações. Os dividendos representam parte do lucro da sociedade anônima que são distribuídos na proporção da quantidade de ações que o investidor possui. Ou seja, as ações proporcionam renda na distribuição dos dividendos e quando comercializadas proporcionam aumento de patrimônio.

2.3. A compra de ações, o risco e a diversificação

A compra de ações por parte dos investidores deve ser feita inicialmente através da escolha de uma instituição credenciada pela bolsa de valores. Em seguida, a abertura de uma conta para movimentação dos recursos financeiros e a efetiva compra das ações. Normalmente, esta compra, conforme Pinheiro (2007, 209) é feita sob orientação de um corretor com base no perfil do investidor e nas características de cada sociedade anônima.

Agora, cabe uma distinção ente o conceito de investidor e especulador. Assim, o primeiro busca a manutenção dos ganhos e o especulador quer a alavancagem de ganhos. Para Cavalcante e Misumi (2003, p.228) o investidor tem como horizonte de tempo o longo prazo e o especulador busca o curto prazo. Por fim, enquanto que o especulador busca o risco para obter seus retornos acima do índice do mercado de ações, o investidor é avesso ao risco.

Qualquer análise sobre o mercado de capitais indica que a volatilidade dos retornos representa risco aos investidores e, em último caso, a busca por ganhos mais rápidos. Esse imediatismo acaba transformando alguns investidores em especuladores. No entanto, o processo de especulação no Brasil, para as ofertas públicas iniciais, deverá ser restringido através de um controle sobre as operações de compra e venda de ações, conforme Cotias (2007).

A idéia do legislador é a de coibir a venda de ações para aqueles investidores que participam das ofertas públicas iniciais e comercializem suas ações nos primeiros três dias após a oferta nas últimas três ofertas, ou que tenha comercializado no primeiro dia, nas últimas cinco ofertas públicas. Com isso, o mais prudente é que o investidor fique com as ações em seu portfólio, por um maior período. Principalmente quando essas operações são realizadas no mercado primário.

Ainda que a compra de ações seja definida como investimento de longo prazo, sua efetiva valorização é incerta e o risco pode ser resumido pela volatilidade dos retornos passados. Assim, quanto mais voláteis são os retornos de uma ação mais arriscada é a compra deste título patrimonial, conforme explica Bodie (2002, p.165).

Acontece que é possível a redução dessa volatilidade através da diversificação. Assim, para um portfólio qualquer de ações, a volatilidade tende a declinar e aproximar-se de um dado limite, conforme explicam Brigham et al (2001, p.190), à medida que novas ações são incorporadas ao portfólio de ações dos investidores.

2.4. Os investidores do mercado de capitais no Brasil

Os participantes do mercado de capitais podem ser definidos em dois grupos. No primeiro grupo estão aqueles que normatizam o mercado de capitais, a exemplo da Comissão de Valores Mobiliários (CMV) e das bolsas de valores. No segundo grupo estão os participantes do mercado de ações. São eles investidores, representados individualmente por pessoas físicas ou coletivamente pelos clubes de investimentos e pelos investidores institucionais.

Para Pinheiro (2007, p.133) os investidores do mercado de ações são classificados em dois grupos: particulares ou individuais e institucionais. O primeiro grupo é formado por pessoas físicas ou jurídicas que participam diretamente no mercado, comprando ou vendendo ações, por si próprios e, desta forma, assumindo o risco.

Já os investidores institucionais são representados por pessoas jurídicas que dispõem de recursos financeiros destinados à reserva de risco e à renda patrimonial. Cavalcanti e Misumi (2003, p.250) citam como exemplos de investidores institucionais os fundos de pensão, as entidades de previdência privada, as sociedades de capitalização, os fundos externos de investimentos e os fundos mútuos de investimentos.

O investimento coletivo representa a maneira mais democrática para compra de ações. Através dos investidores institucionais, que são considerados, conforme Galvão et al (2006, p.247), os maiores provedores de recursos financeiros para investimentos, é possível a gestão dos recursos coletivos. Em geral, os investidores institucionais visam o retorno do investimento no longo prazo podendo financiar investimentos em projetos de longa maturação. Neste sentido, a gestão é profissional uma vez que buscam as melhores alternativas de alocação de recursos, conforme os limites estabelecidos pela legislação.

Já os clubes de investimentos representam associações de pessoas com alguma afinidade para investimentos em ações. São importantes para definição de investimento coletivo uma vez que conseguem diluir riscos e custos associados ao mercado de ações. As decisões de investimentos cabem aos seus participantes.

Não menos importante são os investidores pessoas físicas. Para Galvão et al (2006, p.246) tem crescido a participação no mercado de capitais das pessoas físicas. Fatores como a estabilidade da moeda, queda da taxa de juros e melhoras na produção industrial acabaram estimulando a participação das pessoas físicas no mercado de ações. Segundo Muto (2007), até o final do mês de outubro, 310.634 pessoas físicas estavam cadastradas como investidores.

Para Pavini (2007) os investidores buscam informações sobre as sociedades anônimas e estão dispostos a pagar um prêmio por essas ações, resultando assim em sua valorização. Ou seja, tal disposição permite o aumento do número de investidores na qualidade de pessoas físicas. O volume financeiro negociado diariamente por pessoas físicas é crescente. Portanto, não há dúvida do aumento na participação das pessoas físicas no mercado de ações.

Acontece que os investidores pessoas físicas contam com algumas desvantagens, conforme Cavalcanti e Misumi (2003, p.226), como dificuldade em interpretar adequadamente a informação do mercado; dispõem de pouco tempo de dedicação, uma vez que a operação de investimento não é sua principal ocupação; apresentam pequeno poder de negociação para compra de ações e a possível não formação em Finanças.

No ano de 2007 uma combinação de fatores econômicos foi importante para o crescimento do mercado de capitais. No entanto, o cenário econômico para o ano irá exigir mais da gestão profissional. A migração para compra mais arriscada é uma alternativa para os investidores. Outra alternativa de gestão é a procura por ações que estejam subavaliadas pelo mercado e que apresentem perspectivas de valorização.

A compreensão da redução da volatilidade das ações conjuntas para o investidor não profissional é complexa, uma vez que não se resume a média ponderada da volatilidade individual das ações.

Com isso, o investidor tem a possibilidade de aplicar modelos matemáticos para definição da volatilidade através da definição adequada dos valores a serem investidos em cada ação. A idéia é que esses investidores possam, mensalmente, definir suas posições de compra e venda e tenham, no longo prazo, o retorno mais adequado às suas preferências em relação à volatilidade. Por isso, justifica-se a definição de um modelo, que possa auxiliar esses investidores não profissionais, na seleção dos seus portfólios.

Para permitir o entendimento do modelo proposto nesta dissertação será discutido o modelo de média-variância de Markowitz (1952), no próximo capítulo. A partir da análise dos conceitos de retorno esperado e variância serão explicadas as formações dos portfólios de ações. Com base na combinação de duas ações o modelo de seleção de portfólios será estendido para diversas ações, que acabam representando possíveis portfólios e a determinação da fronteira eficiente. Por fim, a utilização do ativo livre de risco e a impossibilidade de vendas a descoberto serão consideradas na definição do modelo de seleção de portfólios.

3. Seleção de Portfólios com base na média e variância

O objetivo central dos modelos de seleção de portfólios é o de otimizar o capital alocado entre diferentes ações. Em geral, os modelos de seleção de portfólios podem ser classificados como modelos para resolver problemas de decisão sob condições de risco.

Na decisão, sob condições de risco, cada alternativa apresenta possíveis conseqüências com probabilidades de ocorrências definidas. Por isso, cada alternativa está associada com uma distribuição de probabilidade e a decisão do investidor passa a ser uma escolha entre distribuições de probabilidade.

A escolha dessas alternativas pode ser definida de modo que exista algum critério, regra normativa ou padrão que se apresente consistente com os objetivos e preferências do investidor.

3.2. Princípios da seleção de portfólios

As decisões de investimentos eram baseadas no desenvolvimento da economia global, das filiais bem como das firmas individuais. Os títulos patrimoniais ou de dívidas, com pagamentos específicos aos seus detentores, eram avaliados separadamente e a idéia de retorno determinava a alocação no portfólio como o mais importante critério de decisão. Já os títulos públicos, cuja volatilidade em relação à média é igual a zero, constituíam alternativa de investimento livre de risco.

Markowitz (1952) e Roy (1952) deram uma nova aproximação fundamental aos modelos financeiros de decisão, ao fornecerem ao investidor uma ferramenta quantitativa capaz de alocar ações considerando sua escolha entre o retorno esperado (média) e a variância. A despeito da quantificação específica do retorno esperado e da variância do portfólio, os princípios da seleção de portfólio, formulados sobre as bases desses dois trabalhos, são: a) os retornos das ações são considerados como variáveis estocásticas, isto é, cada observação pode ser vista como aleatória com sua distribuição apropriada de probabilidade; b) as variáveis de decisão mais importantes para a alocação dos ativos correspondem ao retorno esperado e a variância e c) as ações são avaliadas conforme seu impacto sobre a variância e o retorno do portfólio.

3.3. Os pressupostos da seleção de portfólios

Markowitz (1952) forneceu em seu trabalho sobre seleção de portfólio uma ferramenta quantitativa capaz de: a) medir a variância e o retorno do portfólio; b) determinar a fronteira eficiente e c) escolher o portfólio ótimo.

Desta forma, medindo os riscos dos portfólios, através do valor das variâncias e dos retornos esperados, com base nos retornos ponderados, a fronteira eficiente é formada pelo espaço geométrico de diversos portfólios, fornecendo diversas combinações entre retornos esperados e variâncias. Assim, essas combinações fornecem o maior retorno esperado para uma dada variância, bem como, a menor variância para um dado retorno esperado.

A seleção de portfólio de Markowitz (1952), em adição aos princípios da teoria de seleção do portfólio, segue os seguintes pressupostos: a) o horizonte de investimento é um período prefixado; b) o investidor é avesso ao risco; c) os ativos livres de risco não existem; d) existem algumas vendas rápidas; e) o mercado de capitais é perfeito; f) não existem impostos nem custos de transação; g) não existem restrições na divisibilidade dos ativos; h) a busca por informação é livre de custos e i) não existem barreiras de entrada no mercado.

3.4. Medidas para seleção dos portfólios

Para o desenvolvimento desta pesquisa o retorno r_t, no período t, de uma ação, é computado como retorno simples, conforme mudanças percentuais de preço, através da seguinte equação:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \tag{3.1}$$

considerando P_t o preço da ação no instante t; P_{t-1} o preço da ação no instante $t-1$; D_t o dividendo pago no instante t e D_{t-1} o dividendo pago no instante $t-1$.

Alternativamente, o retorno geométrico é dado conforme:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t + D_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}\right) \tag{3.2}$$

Se o retorno geométrico for utilizado conforme equação (3.2) sua aplicação não levará a uma situação de preço negativo. Outra vantagem é que permite extensões para períodos múltiplos. Os retornos contínuos de um portfólio $r_{p,t}$ são relacionados aos retornos contínuos $r_{i,t}$ dos ativos no período t através da seguinte equação:

$$r_{p,t} = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e^{r_i}\right) \tag{3.3}$$

onde x representa a fração de capital investido e $e = 2,71828...$ corresponde ao número neperiano.

É importante destacar que tanto a definição do retorno simples pela equação (3.1), quanto a do retorno contínuo pela equação (3.2) são específicas para o caso investigado nesta dissertação, de retornos de ações em bolsa de valores. No mercado de ações, o retorno tem estes dois componentes básicos: a variação do preço e os dividendos distribuídos. Neste contexto, tanto o retorno simples quanto o retorno contínuo podem ser negativos, bastando para que isto ocorra que ocorra variação negativa no preço das ações maior que o valor dos dividendos distribuídos. Assim, o estudo que se desenvolve nesta dissertação dirige-se, apenas, a este tipo de ativo. Neste contexto, em vez de tomarmos como um patamar de referência, o retorno do ativo livre de risco, tomamos como referência um retorno médio do mercado,dado, no caso, pelo IBOVESPA

Por causa da não linearidade de $r_{p,t}$ pesquisas acadêmicas, em Finanças, utilizam o retorno simples r_t. Assim, a relação linear, entre o retorno simples e a fração do capital, define o retorno esperado do portfólio. Portanto, a variável de decisão do investidor no modelo de Markowitz (1952), definida como o retorno esperado será calculada conforme equação (3.1).

O retorno esperado de uma ação i é uma média ponderada probabilística de seu retorno em todos os estados. Assim, definindo p_s como a probabilidade do estado s e r_s o retorno no estado s, o retorno esperado de uma ação i pode ser definido como:

$$\mu_i = \sum_{s=1}^{S} r_s p_s \tag{3.4}$$

Se os retornos da ação i apresentam a mesma probabilidade o retorno esperado do portfólio μ_p passa a ser uma combinação linear dos retornos esperados μ_i de n ações. Sua equação algébrica é dada por:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \tag{3.5}$$

com x_i representando o peso da ação i no portfólio.

A variância mede o risco da ação e é definida como o desvio ao quadrado da diferença entre o retorno e sua média. A variância do retorno da i-ésima ação, representada por σ_i^2 para uma amostra, é representada por:

$$\sigma_i^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(r_{it} - \mu_i)^2}{n-1} \tag{3.6}$$

Outra medida utilizada na seleção de portfólios é o desvio-padrão, definido por σ_i. Representado pela raiz quadrada da variância é dado, conforme:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \frac{(r_{it} - \mu_i)^2}{n-1}} \tag{3.7}$$

Em relação à variância do portfólio a mesma consegue capturar a variabilidade das ações individuais σ_i^2, mas também, a tendência como essas ações se movem conjuntamente para cima e para baixo. Em termos estatísticos σ_{ij} representa a covariância entre as ações i e j. Assim, a variância do portfólio σ_p^2, com base em duas ações i e j, é dada conforme:

$$\sigma_p^2 = \sigma_i^2 x_i + \sigma_j^2 x_j + 2\sigma_{ij} x_i x_j \tag{3.8}$$

sendo σ_{ij} a covariância entre as ações i e j representante da medida de dependência de retorno. A equação da covariância entre duas ações i e j, para uma amostra, é dada por:

$$\sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \frac{(r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j)}{n-1} \tag{3.9}$$

considerando que r_i é o retorno da ação i; μ_i é o retorno médio da ação i, r_j é o retorno da ação j e μ_j o retorno médio da ação j.

3.4.1. Importância da correlação entre os retornos das ações para seleção dos portfólios

O coeficiente de correlação ρ_{ij}, entre o retorno de duas ações i e j, é dado por:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \tag{3.10}$$

Este coeficiente é fundamental por permitir comparações e interpretações entre as diferentes covariâncias. Neste sentido, a correlação +1 significa que os retornos entre duas ações i e j se movimentam na mesma direção. Por outro lado, a correlação -1 significa que esses retornos se movimentam em direções opostas.

Alternativamente com base na equação (3.10) podemos redefinir a covariância entre duas ações i e j, por:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{3.11}$$

Desta maneira, a equação (3.8) pode ser redefinida por:

$$\sigma_p^2 = \sigma_i^2 x_i + \sigma_j^2 x_j + 2\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j \tag{3.12}$$

Então, para as ações analisadas existe um valor para ρ_{ij} tal que a variância do portfólio não pode ser inferior ao menor risco de uma das ações contidas no portfólio.

Considerando inicialmente que as ações i e j apresentam o mesmo retorno esperado, variância e valor investido, caso o coeficiente de correlação seja +1, a variância do portfólio será igual a média ponderada da variância de cada ação e o retorno esperado do portfólio será dado pela média ponderada dos retornos esperados de cada ação. Para a mesma situação, caso o coeficiente de correlação seja -1, a variância do portfólio será igual a zero e o retorno esperado do portfólio será dado pela média ponderada dos retornos esperados de cada ação.

Considerando que as ações apresentam diferentes retorno esperado e variância e mesmo valor investido, se o coeficiente de correlação é igual a +1 a variância do portfólio sofrerá variações lineares. Caso o coeficiente de correlação seja igual a -1, a variância do portfólio não será igual a zero porque as variâncias não são iguais. Para as duas situações o retorno esperado do portfólio continua definido pela média ponderada dos retornos esperados de cada ação.

Por fim, quando as duas ações apresentam diferentes retorno esperado, variância e valor investido para diferentes coeficientes de correlação, o retorno esperado do portfólio permanece dado pela média ponderada dos retornos esperados de cada ação e a variância sofre variações não lineares.

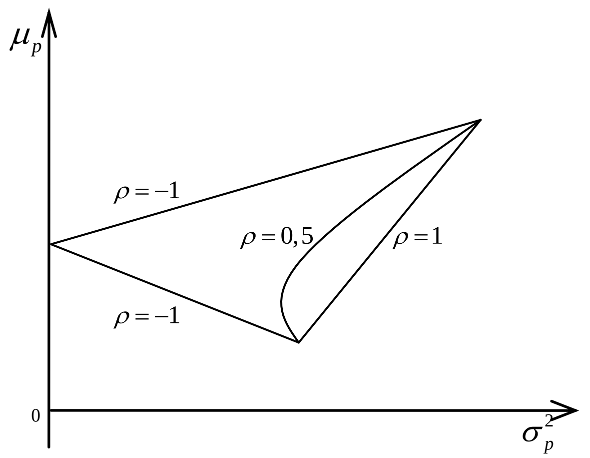

Figura 3.1 Correlação entre duas ações no espaço retorno esperado-variância.
Fonte: Elaboração própria, 2009

Assim, com base na Figura 3.1, quanto menor for o coeficiente de correlação entre os retornos das duas ações i e j, maior será o benefício gerado pela diversificação, através da redução da variância do portfólio, bem como a combinação entre as ações jamais pode apresentar maior variância do que a encontrada numa linha reta ligando essas ações no espaço retorno esperado-variância.

Caso fosse possível achar um conjunto de ações cujas correlações fossem iguais a -1, todo o risco do portfólio poderia ser eliminado. No entanto, como no mundo real tal situação não é possível, o risco do portfólio não pode ser eliminado, conforme explicam Brigham, Gapenski e Ehrhardt (2001, p.185) e a fronteira eficiente acaba assumindo uma forma côncava.

3.5. Fronteira eficiente sem vendas a descoberto e ativo livre de risco

Os portfólios viáveis são obtidos de todas as combinações de ações possíveis em um universo de ações definidas. Delas, o conjunto de restrições define portfólios legítimos. Então, cada portfólio X é eficiente quando encontra as seguintes condições:

1. Representa um portfólio legítimo;
2. Se qualquer portfólio legítimo tem um retorno esperado maior, deve também apresentar uma variância maior que o portfólio X;
3. Se qualquer portfólio legítimo tem uma variância menor, deve também ter um retorno esperado menor que o portfólio X.

Quando o universo de ações não conta com o ativo livre de risco e não são permitidas vendas a descoberto, o portfólio eficiente é computado no modelo de seleção de portfólio conforme:

$$\textit{Minimizar} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \tag{3.13}$$

$$\textit{sujeito a} \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mu_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad para\ i = 1, \ldots, n$$

O portfólio de mínima variância, conforme Figura 3.2, acaba representando a origem da fronteira eficiente.

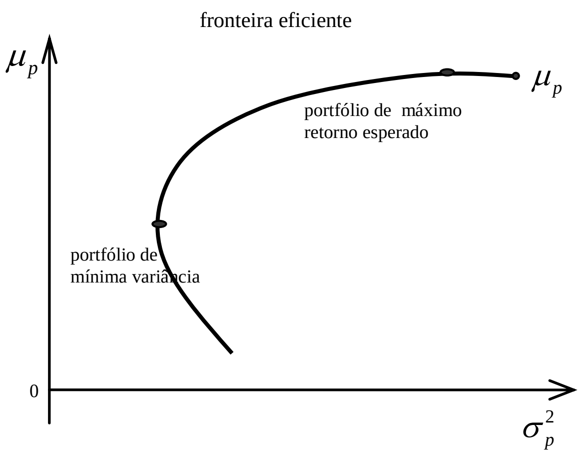

Figura 3.2 Fronteira eficiente sem vendas a descoberto.
Fonte: Elaboração própria, 2009.

A fronteira eficiente é obtida pela otimização repetida para retornos esperados de diferentes portfólios, no intervalo determinado pelo retorno esperado do portfólio de mínima variância e máximo retorno esperado. Sua forma específica depende da extensão da diversificação dos riscos, já que uma correlação negativa entre as ações é responsável pelo formato côncavo da fronteira, conforme visto na seção 3.4.1.

3.5.1. Representação matricial

A representação da fronteira eficiente, para n ações, com o objetivo de minimizar a variância sujeito às restrições do retorno esperado, proibição de vendas a descoberto e ausência do ativo livre de risco é dada conforme:

$$\textit{Minimizar} \quad \sigma_p^2 = \mathrm{X}^T V \mathrm{X} \tag{3.14}$$

$$\textit{sujeito a } \mathrm{X}^T R = \mu_p$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_i ... + x_n = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad \textit{para } i = 1, ..., n$$

A matriz X representa os valores percentuais das ações no portfólio, conforme:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

A matriz R representa os retornos esperados das ações, conforme:

$$R = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

A matriz V, do tipo $n \times n$, representa a matriz de covariância das ações, conforme:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \ldots & \sigma_{ij} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2j} & \sigma_{2n} \\ \sigma_{i1} & \ldots & \ldots & & \sigma_{in} \\ \sigma_{n1} & \ldots & \ldots & \sigma_{nj} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

neste tipo de matriz a diagonal representa as variâncias das ações.

Desta forma, a fronteira eficiente pode ser obtida através da seguinte notação:

$$Minimizar \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \ldots & \ldots & \sigma_{ij} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2j} & \sigma_{2n} \\ \sigma_{i1} & \ldots & \ldots & \sigma_{ij} & \sigma_{in} \\ \sigma_{n1} & \ldots & \ldots & \sigma_{nj} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \mu_p$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i \ldots + x_n = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad para\ i = 1, \ldots, n$$

3.5.2. Representação alternativa da seleção

A seleção de portfólios também pode ser definida através da programação por metas, a ser explicada no Capítulo 6. Sua representação é dada por:

MP)1

$$Maximizar\ Z_1 = \mathrm{X}^T R \tag{3.19}$$

$$Maximizar\ Z_2 = {}^{1}\!/\!_{\mathrm{X}^T V \mathrm{X}} \tag{3.20}$$

$$sujeito\ a\ x_1 + x_2 + \ldots + x_i \ldots + x_n = 1 \tag{3.21}$$

$$x_i \geq 0, \quad para\ i = 1, \ldots, n \tag{3.22}$$

3.5.3. A introdução do ativo livre de risco

Além das ações que são consideradas como ativos com risco, existem no mercado, ativos livres de risco, que apresentam baixa volatilidade ou, até mesmo, não se correlacionam com o índice do mercado de ações. Desta forma, caso o investidor possa aplicar nesses ativos, os portfólios eficientes recaem sobre a linha do mercado de capitais, definida em Finanças por LMC.

A LMC representa uma linha com origem no ativo livre de risco, representado por r_f, até um ponto sobre a fronteira eficiente. O portfólio onde a reta é tangente à fronteira eficiente coincide com o portfólio de mercado que contem todas as ações medidas por sua capitalização de mercado. Assim, o portfólio C que recai sobre a LMC, representada por $r_f C$, passam a dominar os portfólios A e B existentes sobre a fronteira eficiente, conforme Figura 3.3.

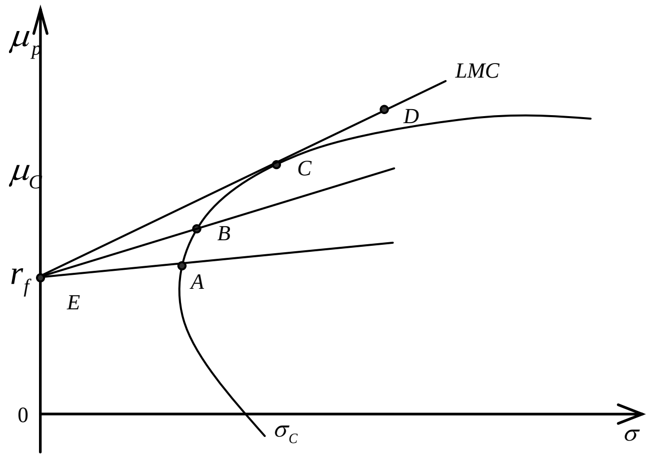

Figura 3.3 Linha de Mercado de Capitais.
Fonte: Elaboração própria, 2009.

Para representar a LMC, considerara-se que x representa a proporção aplicada pelo investidor num ativo livre de risco. Então, o retorno esperado do portfólio μ_p, obtido pela combinação entre o ativo livre de risco com um portfólio com risco, definido por C, é dado por:

$$\mu_p = (1-x)r_f + x\mu_C \tag{3.23}$$

Considerando dois pontos, E e C, na LMC, o coeficiente angular da LCM é dado por:

$$\frac{\mu_C - r_f}{\sigma_C - \sigma_{r_f}} \tag{3.24}$$

como σ_{rf} é igual a zero, o coeficiente angular é:

$$\frac{\mu_C - r_f}{\sigma_C} \tag{3.25}$$

Todas as combinações do ativo livre de risco com portfólios com risco irão estar situados numa linha reta no espaço retorno esperado-variância. As combinações, conforme Figura 3.3, ao longo da linha $r_f B$ são superiores as combinações situadas na linha $r_f A$. Elton et al (2004, p.92) explicam que, se a linha reta que passa por r_f for girada no sentido anti-horário, a seleção ótima é definida na tangência entre as combinações dos ativos com risco e o ativo livre de risco. Em relação à Figura 3.3 este ponto é definido por C.

Considerando que alguns investidores são avessos ao risco, a opção seria investir em combinações entre o segmento $r_f C$, aplicando parte dos seus recursos num portfólio com risco, definido por C, e a outra parte no ativo livre de risco, não realizando qualquer tipo de empréstimo. Agora, se os investidores gostam do risco os mesmos definem seus portfólios no segmento CD, tomando recursos emprestados à taxa livre de risco para aplicar seu capital mais os recursos do empréstimo no portfólio D.

Assim, a inclusão do ativo livre de risco altera a fronteira eficiente, definida anteriormente pela Figura 3.2, de forma que o retorno esperado do portfólio passa a ser representado por uma reta $r_f CD$ na Figura 3.3. Considerando que o mercado está em equilíbrio, o portfólio C é responsável por conter todas as ações na exata proporção em relação ao valor de mercado de cada empresa. Ou seja, o portfólio C, para o modelo, representa o portfólio do mercado de ações.

Como o intercepto da LMC é dado r_f e C representa o portfólio do mercado de ações, o retorno do portfólio do investidor será dado por:

$$\mu_p = r_f + \left(\frac{\mu_C - r_f}{\sigma_C} \right) \sigma_p \tag{3.26}$$

3.5.4. Fronteira eficiente com vendas a descoberto e empréstimos ilimitados do ativo livre de risco

Para definição da fronteira eficiente com vendas a descoberto e aplicações e empréstimos sem restrição, com base na taxa livre de risco, é necessária a existência de um portfólio que seja preferível a outros portfólios existentes. Desta maneira, dentro do espaço retorno esperado-variância, este portfólio irá situar-se no raio que liga o ativo livre de risco e que se encontra mais à direita no sentido anti-horário, conforme Figura 3.4.

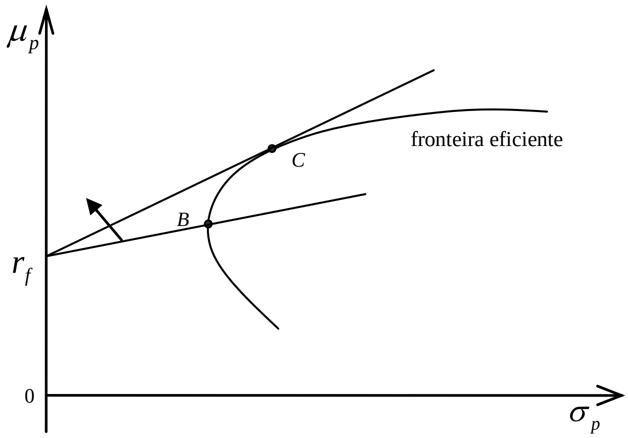

Figura 3.4 Linha de Mercado de Capitais quando são permitidas vendas a descoberto e empréstimos e aplicações são feitos à taxa livre de risco.
Fonte: Elaboração própria, 2009.

Para Elton et al (2004), quando as vendas a descoberto e o uso sem restrições do ativo livre de risco são permitidos, a fronteira eficiente, passa a corresponder a todo o comprimento do raio que parte de r_f e passa por C, conforme Figura 3.4. Uma maneira de identificar este raio consiste em reconhecer que o mesmo apresenta a maior inclinação da LMC.

A inclinação da LMC que intercepta o ativo livre de risco com o portfólio eficiente é definida na equação (3.26). Então, o portfólio eficiente é identificado como o maior quociente entre o retorno em excesso (a diferença entre o retorno esperado e o retorno do ativo livre de risco) e o desvio-padrão que satisfaz as condições do problema.

3.5.4.1. Representação algébrica

A representação da fronteira eficiente, para n ações, com vendas a descoberto e aplicações e empréstimos ilimitados com base no ativo livre de risco, com o objetivo de maximizar o retorno em excesso, é dada por:

$$Maximizar \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)}{\left[\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\right]^{1/2}} \tag{3.27}$$

sujeito a

$x_{n+1} = 1 - I^T X$

$x_i \in \Re$

considerando que x_{n+1} representa a porcentagem investida no ativo livre de risco, com I^T igual ao vetor de $1\acute{}s$ para cada componente do portfólio.

Quando são permitidas vendas a descoberto e aplicações e empréstimos sem restrições à taxa livre de risco o conjunto eficiente não apresenta limite superior. Elton et al (2004, p.108) explicam que outras restrições são utilizadas na definição da fronteira eficiente. Para os autores as restrições mais comuns são as que fixam limites superiores para aplicações em qualquer ação. Essas restrições atendem a legislação imposta aos investimentos. As restrições também podem ocorrer em função do volume de compra e venda bem como do risco mínimo.

3.5.5. Fronteira eficiente sem vendas a descoberto e empréstimos do ativo livre de risco

Este problema é análogo a situação de aplicação e empréstimo à taxa livre de risco quando as vendas a descoberto são permitidas. Existe um portfólio ótimo e o objetivo é o de maximizar a inclinação da reta que liga o ativo livre de risco com um portfólio de ativos com risco. No entanto, o conjunto de portfólios disponíveis para combinar com o ativo livre de risco é diferente pela existência de uma nova restrição. Para este caso, os investidores não podem ter proporções negativas em seus portfólios e, estão limitados a investirem apenas o valor de seu patrimônio disponível.

3.5.5.1. Representação algébrica

A representação da fronteira eficiente, para n ações e o ativo livre de risco, sem vendas a descoberto e aplicação limitada ao patrimônio do investidor, com o objetivo de maximizar o retorno em excesso é dada conforme:

$$\textit{Maximizar} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i (r_i - r_f)}{\left[\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j\right]^{1/2}} \tag{3.28}$$

sujeito a

$x_1 + x_2 + ... + x_i ... + x_n = 1$

$x_i \geq 0, \quad para\ i = 1,...,n$

Quando existe a possibilidade de aplicação nos ativos com risco e no ativo livre de risco sujeita a proibição de participações percentuais negativas das ações no portfólio, levando em consideração que o investidor investe o patrimônio disponível, o modelo de seleção proposto por Markowitz (1952) apresentado em (3.13) proporciona os mesmo resultados para (3.27). No entanto, justifica-se a explicação da metodologia que maximiza a inclinação da linha de mercado, uma vez que a mesma será utilizada, nessa dissertação, para compreensão do modelo de seleção de portfólios proposto por Lai (1991), no capítulo quatro.

3.6. Alocações dinâmicas para seleção de portfólios

A estimativa de erros nos dados para otimização representa um problema considerável no modelo de seleção de portfólios, uma vez que as alocações são extremamente sensíveis as variações nos valores de entrada, conforme Chopra e Ziemba (1993) e Persson (2000). Assim, o procedimento adotado pelo modelo de seleção pode superutilizar a informação estimada estatisticamente e aumentar os erros das estimativas, caso a medida de dependência entre as ações não seja atualizada.

A incerteza sobre a entrada de dados reforça a necessidade para a revisão do portfólio ao longo do tempo. Este problema não é considerado no modelo de Markowitz (1952) por tratar-se de um modelo de período prefixado. Em Finanças, tal política é conhecida por comprar e manter. Entretanto, como os retornos das ações se movem aleatoriamente, a porcentagem investida em cada ação pode não definir o retorno esperado desejado. Nos modelos de seleção de portfólios, com alocação dinâmica, o investidor deve rebalancear seu portfólio para o retorno desejado ao transferir riqueza de ações para outras no final de cada período.

As informações confiáveis são essenciais para o modelo de seleção com base na média e variância. Elton et al (2004, p.95) explicam que as características dos retornos das ações variam no tempo. Então, há uma relação custo *versus* benefício que deve ser considerada na utilização do uso de um período longo para melhora da precisão das estimativas.

Além da alocação dinâmica, as áreas mais importantes, em relação à seleção de portfólios de Markowitz (1952), que ocorrem na literatura de Finanças, podem ser resumidas nos tópicos: i) risco do investidor e preferências de valores, conforme Yitzhaki (1982), Konno e Yamazaki (1991), Ballestero (2005); ii) congruência com a utilidade esperada e dominância estocástica, conforme, Bawa et al (1985), Dachraoui e Dionne (2001); iii) diversificação do risco e revisão do portfólio, através de modelos estáticos e dinâmicos, conforme Treynor (1994), Dutta et al, (2000), Loewenstein (2000), Josa-Fombellida e Rincón-Zapatero (2001); iv) utilização do terceiro momento estatístico, conforme Arditti e Levy (1975), Kumar et al (1978), Lai (1991), Chunhachinda et al (1997), Harvey e Siddique (2000), Prakash et al. (2003), Sun e Yan (2003), Canela e Collazo (2007); v) modelos com limites para aproximar a utilidade ótima do investidor sobre a fronteira eficiente, conforme Ballestero (1998), Ballestero e Plà-Santamaria (2003). O objeto de interesse desta dissertação reside nos itens i e iv.

3.7. Seleção de portfólios e suas contribuições

Após o trabalho de Markowitz (1952), vários outros modelos surgiram para resolver problemas encontrados no mercado de capitais a exemplo das restrições impostas por transações com lotes mínimos, conforme Mansini e Speranza (1999) bem como custos de transação, conforme Konno e Wijayanayake (2001). No entanto, a grande variedade dos modelos deve-se a utilização de outras medidas de risco, a exemplo de Konno e Yamazaki (1991), que fazem uso do desvio-médio absoluto e Young (1998), que faz uso da medida cenário do pior caso. Anterior a estas pesquisas, destacam-se também o uso da semivariância, a exemplo de Quirk e Saposnik (1962), Mao (1970) e Ang e Chua (1979) conforme (1959, apud Nawrocki, 1999, p.4), Hogan e Waren (1974), Ballestero (2005), Beach (2007) e Estrada (2008).

O modelo proposto por Markowitz (1952) resultou na construção do modelo mais usado tanto na academia como no mundo dos negócios. Denominado de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), o modelo presume haver uma relação linear entre os retornos de mercado e o retorno das ações. Assim, num mercado o preço das ações deve refletir seus riscos de forma a equilibrar a demanda e oferta. Como os retornos das ações não são distribuídos normalmente, Estrada (2002) desenvolveu o modelo D-CAPM, utilizando a semivariância como medida de risco. Em razão de suas características todos esses modelos fazem uso da programação quadrática.

No próximo capítulo será discutido o modelo de média-variância-assimetria de Lai (1991). A partir da análise dos conceitos anteriores e da incorporação da assimetria são formados os portfólios de ações. Com base na combinação de ações, na possibilidade de captação de empréstimos à taxa livre de risco e de vendas a descoberto, o modelo de seleção de portfólios de Lai (1991) é definido através da programação por metas.

4. Seleção de Portfólios com base na Assimetria

Além das medidas retorno esperado e variância, vistas no Capítulo 3 desta dissertação, o modelo de seleção, com base na assimetria, requer o terceiro momento estatístico σ_i^3, definido com base numa amostra, conforme:

$$\sigma_i^3 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(r_{it} - \mu_i)^3}{n-1} \tag{4.1}$$

onde r_i é o retorno da ação e μ_i é o retorno médio.

A extensão da união dos movimentos de alta ou de baixa dos retornos entre três ações i, j e k, com base numa amostra, é representada pelo co-terceiro momento estatístico $\sigma_{i,j,k}^3$, definido conforme:

$$\sigma_{i,j,k}^3 = \sum_{t=1}^{n} \frac{(r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j)(r_{kt} - \mu_k)}{n-1} \tag{4.2}$$

Quando a assimetria é positiva, os retornos superiores ocorrem em magnitude maior do que os retornos inferiores, de forma que a distribuição dos retornos apresenta uma cauda do lado direito. Pelo fato da média exceder a mediana, uma concentração de retornos está abaixo da média. O oposto ocorre numa assimetria negativa.

As distribuições de probabilidade simétricas exibem assimetria igual a zero. Em Finanças, os investidores preferem, comumente, ações cujas distribuições dos retornos apresentem assimetria positiva.

4.1. Seleção com base na média, variância e assimetria

Embora as pesquisas tenham demonstrado a existência de um prêmio de risco para a assimetria, apenas algumas conseguiram contribuir para a construção de um portfólio com base nesta medida. Desta forma podemos citar Arditti e Levy (1975), Kumar et al (1978) e Lai (1991). Os primeiros autores sugeriram um modelo para resolver o conjunto eficiente com base no retorno médio, variância e assimetria para um modelo multiperíodo. Ao assumirem a condição de que os retornos são identicamente e independentemente distribuídos com assimetria igual a zero, em cada período, acabaram ignorando a mesma.

No entanto, essa condição deve ser desconsiderada, conforme Chunhachinda et al, (1997, p.146), já que o terceiro momento estatístico num modelo multiperíodo não é necessariamente insignificante. Lai (1991, p.294) explica que, o portfólio derivado, ao omiti-lo de cada período em um modelo multiperíodo conduz a um portfólio ineficiente. Além disso, a pesquisa de Arditti e Levy (1975) ignorou o efeito da coassimetria sobre a seleção de portfólio.

Harvey e Siddique (2000) indicam que a assimetria de retornos das ações é relevante para a seleção de portfólio. Os autores argumentam que se os retornos das ações apresentam co-assimetria não diversificável, os retornos esperados devem recompensá-los.

Harvey et al (2003), usando uma aproximação Bayesiana, investigaram a importância do terceiro momento estatístico e a incerteza dos valores na seleção de portfólios. Também documentaram que a distribuição normal multivariada não é útil para modelagem dos retornos de portfólio porque não permite a assimetria dos retornos.

A preferência do investidor por assimetria positiva torna o procedimento de otimização de portfólio complexo, conforme Lai (1991) e seguido por Chunhachinda et al (1997), Prakash et al. (2003) além de Sun e Yan (2003). O procedimento que inclui a assimetria foi primeiro introduzido por Tayi e Leonard (1988, apud Chunhachinda et al, 1997) e consiste numa programação por metas que analisa as medidas retorno esperado, variância e a assimetria da distribuição dos retornos das ações.

4.1.1. Os pressupostos da seleção

Para Lai (1991, p.295) a seleção de portfólio ideal com momentos estatísticos superiores tem por base os seguintes pressupostos: a) investidores são avessos ao risco e ao mesmo tempo buscam maximizar sua riqueza ao final do período; b) existem $n+1$ ativos e o ativo $(n+1)$ é considerado como o ativo livre de risco; c) os ativos são perfeitamente divisíveis; d) as taxas de aplicação e de empréstimo são iguais as taxas de retorno do ativo livre de risco; e) o mercado de capital é perfeito e não existem taxas nem custos de transação e e) são permitidas vendas curtas e ilimitadas de todos os ativos.

4.1.2. Fronteira eficiente com vendas a descoberto e empréstimos com base na taxa livre de risco

A média, a variância e a assimetria dos retornos r_i sobre as ações i existem para todo ativo de risco i, considerando $i = 1, 2, ..., n$. A matriz de covariância, representada por V é obtida através dos retornos das ações. Além disso, Lai (1991, p.295) definiu $\mathrm{X}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ como a matriz transposta dos componentes do portfólio X, onde x_i é a porcentagem da riqueza investida nos ativos com risco i e a porcentagem investida no ativo livre de risco é determinada por $x_{n+1} = 1 - I^T \mathrm{X}$, com I^T representando o vetor de $1's$ para cada componente do portfólio.

Além das considerações acima, Lai (1991, p.295) definiu a matriz transposta para R como $R^T = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$, cujo retorno esperado para cada ativo é dado por μ_i; $\overline{R}$ representando o retorno médio do portfólio; r_f como o retorno do ativo livre de risco; $(R - r_f)$ representando o vetor $n \times 1$ do retorno esperado em excesso e E o valor esperado pelo investidor em relação à assimetria.

Então a média, a variância e a assimetria dos retornos do portfólio podem ser definidas, conforme Chunhachinda et al (1997, p.148) como:

$$Média = \mathrm{X}^T (R - r_f) \tag{4.4}$$

$$Variância = \mathrm{X}^T V \mathrm{X} \tag{4.5}$$

$$Assimetria = E\left[\mathrm{X}^T (R - \overline{R})\right]^3 \tag{4.6}$$

A escolha de X deve seguir um caminho capaz de maximizar o retorno esperado como também maximizar a assimetria e simultaneamente minimizar a variância. Acontece que, como esses objetivos são conflitantes, a resolução depende do julgamento subjetivo do investidor e das suas preferências.

A seleção de portfólio, através da definição da porcentagem da riqueza investida nos ativos com risco e livre de risco é obtida pelo maior quociente entre o retorno em excesso e o desvio-padrão que satisfaz as condições do problema, conforme equação (3.23) do Capítulo 3. Como Lai (1991) sugere que a escolha do portfólio X seja restrita sobre o espaço da variância unitária, isto é $\{X \mid X^T V X = 1\}$, não há necessidade de maximizar o quociente entre o retorno em excesso e o desvio-padrão, mas apenas de maximizar o retorno sujeito a condição de variância unitária.

Então, a seleção de portfólio, quando incorpora a assimetria, pode ser formulada para resolver o seguinte problema de programação por metas, conforme Chunhachinda et al (1997, p.148):

$$Maximizar\ Z_1 = X^T (R - r_f) \tag{4.7}$$

$$Minimizar\ Z_2 = X^T V X \tag{4.8}$$

$$Maximizar\ Z_3 = E\left[X^T (R - \bar{R})\right]^3 \tag{4.9}$$

Como são permitidas vendas a descoberto e empréstimos com base no ativo livre de risco, os investidores passam a definir seus portfólios, tomando recursos emprestados à taxa livre de risco x_{n+1} para aplicar seu capital mais os recursos do empréstimo.

Desta forma, as vendas a descoberto nos portfólios localizadas mais à direita da reta $r_f C$, conforme Figura 4.1, são os mais preferidos pelos investidores. Sob a condição de variância unitária, vendas a descoberto e empréstimos do ativo livre de risco, a seleção de portfólio com assimetria, conforme Chunhachinda et al (1997, p.148) é dada por:

MP)1

$$Maximizar\ Z_1 = X^T (R - r_f) \tag{4.10}$$

$$Maximizar\ Z_3 = E\left[X^T (R - \bar{R})\right]^3 \tag{4.11}$$

sujeito a $X^T V X = 1$ (4.12)

$$x_{n+1} = 1 - I^T X \qquad (4.13)$$

Assim, Lai (1991) definiu um limite para este segmento ao restringir a variância do portfólio igual a unidade.

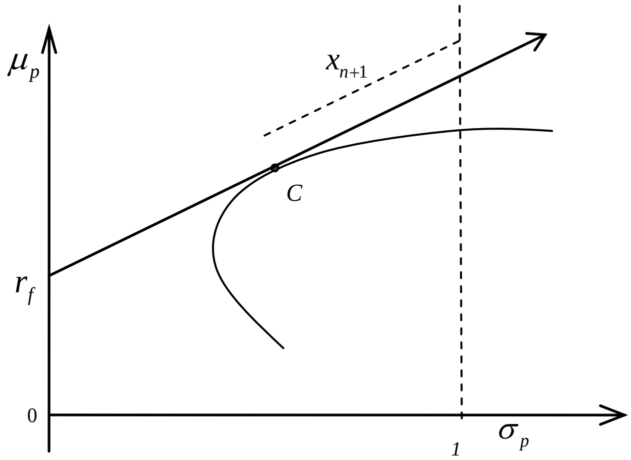

Figura 4.1 Linha de Mercado de Capitais com vendas a descoberto e empréstimos e aplicações à taxa livre de risco sob variância unitária.
Fonte: Elaboração própria, 2009.

4.1.2.1. Representação matricial

A representação matricial da equação (4.10), sob a restrição da variância unitária, quando são permitidas vendas a descoberto e aplicação e empréstimos, com base no ativo livre de risco, é dada conforme:

Maximizar (4.14)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu_1 - r_f \\ \mu_2 - r_f \\ \vdots \\ \mu_i - r_f \\ \vdots \\ \mu_n - r_f \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \dots & \sigma_{ij} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2j} & \sigma_{2n} \\ \sigma_{i1} & \dots & \dots & \sigma_{ij} & \sigma_{in} \\ \sigma_{n1} & \dots & \dots & \sigma_{nj} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 1 \tag{4.14}$$

$$1 - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_{n+1}$$

$x_i \in \Re$

considerando que a matriz M do tipo $n \times n^2$ ações representa a matriz do co-terceiro momento das ações (interações curvilíneas) e é definida por:

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_{111} & \dots & \dots & \sigma_{ijj} & \sigma_{1nn} \\ \sigma_{211} & \dots & \dots & \sigma_{2jj} & \sigma_{2nn} \\ \sigma_{i11} & \dots & \dots & \sigma_{ijj} & \sigma_{inn} \\ \sigma_{n11} & \dots & \dots & \sigma_{njj} & \sigma_{nnn} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Na pesquisa de Chunhachinda et al (1997, p.148) a assimetria é definida como o terceiro momento. Então, a maximização do terceiro momento, na equação (4.11), sob a restrição da variância unitária é definido em Athayde e Flôres (2004, p.1338) por:

Maximizar (4.16)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{111} & \dots & \dots & \sigma_{ijj} & \sigma_{1nn} \\ \sigma_{211} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2jj} & \sigma_{2nn} \\ \sigma_{i11} & \dots & \dots & \sigma_{ijj} & \sigma_{inn} \\ \sigma_{n11} & \dots & \dots & \sigma_{njj} & \sigma_{nnn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \dots & \sigma_{ij} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2j} & \sigma_{2n} \\ \sigma_{i1} & \dots & \dots & \sigma_{ij} & \sigma_{in} \\ \sigma_{n1} & \dots & \dots & \sigma_{nj} & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 1$$

$$1-\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_i\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_{n+1}$$

$x_i \in \Re$

Para isso considera-se que $\otimes$ é o produto de Kronecker. Este produto ou produto tensorial é útil para resolver equações lineares em que a incógnita é uma matriz. Através das propriedades deste produto, dadas duas matrizes $A \in C^{m\times n}$ e $B \in C^{p\times q}$, o produto de Kronecker de A por B, denotado por $A \otimes B$ é dado conforme:

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & \dots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B\end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Como as dimensões de $A \otimes B$ são $m \times n$ e $p \times q$ o produto de Kronecker passa a ser definido para as matrizes A, B de qualquer natureza.

4.1.3. Representação da seleção de portfólio sem vendas a descoberto e empréstimos

Agora, quando não são permitidas vendas a descoberto nem empréstimos e as aplicações estão sujeitas ao patrimônio total do investidor, a seleção de portfólio deve ser modificada, conforme:

$MP)1$

$$Maximizar\ Z_1 = X^T R \tag{4.18}$$

$$Maximizar\ Z_3 = E\left[X^T (R-\overline{R})\right]^3 \tag{4.19}$$

$$sujeito\ a\ x_1 + x_2 + ... + x_i ... + x_n = 1 \tag{4.20}$$

$$x_i \geq 0, \quad para\ i = 1, \ldots, N \tag{4.21}$$

4.2. Solução da seleção de portfólio em duas etapas

Qualquer solução simples do problema multiobjetivo $MP1$ proposto por Lai (1991) não satisfaz os objetivos Z_1 e Z_3 simultaneamente. Assim, o resultado para o problema envolve um procedimento em duas etapas. Na primeira etapa, um conjunto de soluções independentes das preferências do investidor é definido. Então, o conjunto das soluções é definido através das soluções individuais para (4.10) e (4.11), sujeitas às condições (4.12) e (4.13).

Na segunda etapa, conforme equação (4.22), as preferências do investidor são incorporadas através dos valores atribuídos a α e β. Assim, dada a preferência do investidor pelo retorno esperado e pela assimetria, representados respectivamente por α e β, a solução da programação por metas, conforme Lai (1991, p.296), é dada por:

$(MP2)$

$$Minimizar\ Z = (d_1)^{\alpha} + (d_3)^{\beta} \tag{4.22}$$

$$sujeito\ a\ \mathrm{X}^T (R - r_f) + d_1 = Z_1^* \tag{4.23}$$

$$E\left[\mathrm{X}^T (R - \overline{R})\right]^3 + d_3 = Z_3^* \tag{4.24}$$

$$\mathrm{X}^T V \mathrm{X} = 1 \tag{4.25}$$

$$d_1, d_3 \geq 0$$

considerando Z_i^* o valor dos extremos dos objetivos Z_i quando eles são otimizados individualmente sob a restrição (4.12); d_i as variáveis não negativas que representam os desvios entre Z_i^* e Z_i ; α e β os valores não negativos representando as preferências dos investidores. As soluções obtidas em $MP1$, através de (4.10) e (4.11), são utilizadas como valores para Z_1^* e Z_3^* em (4.23) e (4.24), respectivamente, para $MP2$.

Para Lai (1991, p.297), a solução do problema multiobjetivo reside no uso do método de programação por metas, que requer as preferências do investidor para o retorno esperado e para a assimetria, conforme diferentes valores para α e β. Desta forma, a função objetivo não contém variáveis de escolha. Ao contrário, apresenta variáveis de desvios, que representam os desvios entre os objetivos que podem ser alcançados, dado um conjunto de restrições. Se os objetivos apresentam o mesmo nível de prioridade, o valor relativo do objetivo é sempre positivo porque os desvios entre Z_i^* e Z_i serão sempre positivos.

4.3. Soluções para diferentes valores de alfa e beta

Quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, Lai (1991, p.296) explica que a solução do problema multiobjetivo $MP2$ é um caso especial do portfólio eficiente de média-variância. Assim, a solução do problema $MP2$ é o produto de uma escalar e do portfólio eficiente média-variância $V^{-1}(R - r_f)$ além de Z_1^* representar o retorno em excesso do mercado (a diferença entre o retorno do mercado e retorno do ativo livre de risco) $r_M - r_f$, conforme Figura 4.2.

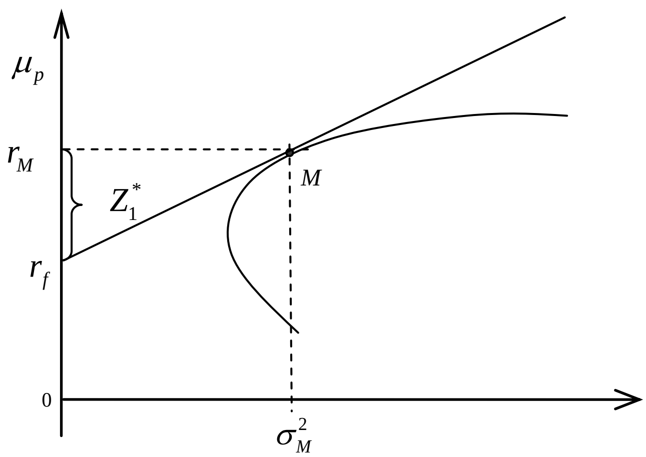

Figura 4.2 Linha de Mercado de Capitais e a solução quando alfa e beta são iguais a um e zero, respectivamente**.**
Fonte: Elaboração própria, 2009

A combinação $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, conforme Prakash et al (2003, p.1384), representa o portfólio eficiente de média-variância-assimetria. As combinações das preferências não zero resultarão em diferentes portfólios com base na média, variância e assimetria, dependendo das preferências do investidor. Em seu trabalho, Lai (1991) definiu diferentes soluções, conforme as preferências por α e β.

Como o modelo permite vendas a descoberto e empréstimos ilimitados à taxa livre de risco, após a definição da porcentagem de x_1 em $MP2$, Lai (1991, p.299) reescalona o portfólio tal que o total do investimento passe a ser igual a um. Para isso, o autor considerou o portfólio Y, cujo elemento i é determinado por $y_i = x_i / (x_1 + x_2 + ... + x_n)$. Desta maneira, as porcentagens na seleção do portfólio ótimo com assimetria para diferentes preferências do investidor são redefinidas.

4.4. A distribuição dos retornos das ações

Na maioria dos casos, quando as distribuições individuais dos ativos são examinadas em detalhes, valores extremos são encontrados. Em geral, a assimetria depende da distribuição dos valores extremos sobre os dois lados, conforme explicam Canela e Collazo (2007, p.235). Percebe-se a importância da assimetria na seleção de portfólios porque a alocação dos pesos no portfólio ótimo pode ser afetada por esse parâmetro.

As distribuições dos retornos em mercados emergentes não mostram padrões normais e esses resultados são documentados por Harvey (1991) e Estrada (2002). Em geral, as distribuições dos ativos nos mercados emergentes exibem assimetria e, se as distribuições dos retornos desses ativos não são normais, as análises com base na média-variância não são as mais adequadas.

4.5. Alteração no modelo proposto por Lai (1991)

Uma alteração devida ao trabalho de Sun e Yan (2003) é a modificação da função objetivo $Z = (d_1)^\alpha + (d_3)^\beta$, conforme Lai (1991), pela função $Z = (1 + d_1)^\alpha + (1 + d_3)^\beta$. A razão para isso deve-se a possibilidade de $d_1; d_3 \leq 1$. Assim, ao assumir que α é maior que β, por exemplo, $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, para qualquer investidor, quando $d_1; d_3 \geq 1$, as funções objetivo definidas por Sun e Yan (2003) bem como por Lai (1991), apresentam o mesmo resultado. Entretanto, para Sun e Yan (2003), quando $d_1; d_3 \leq 1$, a função objetivo de Lai (1991) sugere o oposto.

Assumindo as preferências do investidor entre retorno esperado e assimetria, representadas pelas preferências não negativas α e β, o problema $MP2$ da programação por meta, é alterado, conforme San e Yan (2003, p.7):

$(MP2)$

$$Minimizar\ Z = (1+d_1)^{\alpha} + (1+d_3)^{\beta} \tag{4.26}$$

$$sujeito\ a\ \mathrm{X}^T(R - r_f) + d_1 = Z_1^* \tag{4.27}$$

$$E\left[\mathrm{X}^T(R - \overline{R})\right]^3 + d_3 = Z_3^* \tag{4.28}$$

$$\mathrm{X}^T V \mathrm{X} = 1 \tag{4.29}$$

Quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ um decréscimo em d_1 produz utilidade inferior para o investidor em relação a um decréscimo similar em d_3, o que deveria ser o contrário. Sun e Yan (2003) ao adicionarem o número 1, a ambos d_1 e d_3, permitem que a utilidade inferior não seja considerada quando d_1 e d_3 são menores do que a unidade.

Para compreender, iremos considerar que os desvios d_1 e d_3 são menores que 1, por exemplo, 0,05. Ao assumir que $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, a função objetivo definida por Lai (1991) produz o resultado: $Z = (0,05)^3 + (0,05)^1 = 0,00013 + 0,05000$. O desvio em 0,05, na preferência por retorno, produz um resultado menor na função objetivo Z, colaborando para sua redução. Mas, se o investidor define $\alpha = 3$ é porque o mesmo tem uma maior preferência por retorno e, sua expectativa é de um menor desvio. Agora, ao adotar a função objetivo definida por San e Yan (1999) o resultado $Z = (1,05)^3 + (1,05)^1 = 1,15763 + 1,05000$ acaba representando melhor a preferência do investidor por retorno. Ou seja, se o objetivo é minimizar os desvios, o desvio de 0,05, ao contrário de ser aceito, pode ser rejeitado, uma vez que o mesmo não colabora para minimização da função objetivo Z.

No próximo capítulo será discutido o modelo de média-semivariância. A partir da importância da diversificação para seleção de portfólios a semivariância é utilizada na seleção de portfólios através de um problema de programação por metas. A impossibilidade de vendas a descoberto e de empréstimos são consideradas uma vez que o objetivo é tornar o modelo próximo da realidade do investidor não profissional.

5. Seleção de portfólios com base na média e semivariância

O modelo descrito por Lai (1991) e usado nas pesquisas por Chunhachinda et al (1997), Sun e Yan (2003) bem como por Prakash et al (2003) tiveram como objetivo incorporar a assimetria na seleção de portfólio através da programação por metas. No entanto, diversos autores, a exemplo de Sortino e Price (1994), Bond e Satchell (2002), Estrada (2002), Ballestero (2005), Beach (2007) e mais recentemente Estrada (2008) justificam que a medida semivariância é mais plausível que a variância quando a distribuição de retornos das ações é assimétrica.

Markowitz (1991) já havia reconhecido a importância desta idéia. Para o autor os investidores estão interessados em minimizar riscos de perdas porque os retornos das ações podem não estar distribuídos normalmente. Com isso, a semivariância passa a ser útil aos investidores na tomada de decisões quando a distribuição dos retornos das ações não é simétrica.

5.1.1. O uso da semivariância nas pesquisas em finanças

Em Finanças duas sugestões a medida semivariância foram fornecidas por Markowitz (1959, apud Nawrocki, 1999, p.10): a primeira é computada em relação ao retorno médio e a segunda em relação ao retorno alvo. Ou seja, as duas medidas calculam a dispersão usando apenas os retornos que estão abaixo do retorno médio ou do retorno alvo.

Assim, ao contrário da variância, que interpreta qualquer diferença do retorno médio, acima ou abaixo, como indesejado, é possível descrever o risco abaixo do retorno médio ou do retorno alvo em termos de tolerância ao risco. O modelo de seleção de portfólios com base na média-variância baseia-se no fato de que a variância, para definição do risco do portfólio, assume que a distribuição dos retornos assemelha-se a uma curva normal. Acontece que a distribuição normal permite taxas de retornos menores que -100% e, isto não é possível para cotações das ações.

Percebendo a limitação do seu modelo de seleção, Markowitz (1991) propôs o uso da semivariância como uma medida de risco alternativa e preferível. Mesmo apresentando essas desvantagens, o uso da variância por mais de 50 anos deve-se ao fato de que a medida é familiar e conveniente em relação ao cálculo. Não somente isso, tal preferência também ocorre porque a solução da seleção com base na média-variância requer a matriz de covariância, enquanto que a seleção com base na semivariância requer a matriz de cosemivariância, que pode apresentar problemas endógenos, conforme Estrada (2008, p.3).

Outras pesquisas em Finanças fizeram o uso da semivariância em relação ao retorno alvo, a exemplo de Quirk e Saposnik (1962), Mao (1970) e Ang e Chua (1979) conforme (1959, apud Nawrocki, 1999, p.4), além de Hogan e Waren (1974). Estes últimos autores fizeram uso da medida semivariância para definição dos preços dos ativos financeiros. Ballestero (2005) propôs em sua pesquisa um modelo para definição da fronteira eficiente com base na semivariância. Para isso fez uso da medida, levando em consideração que o retorno alvo é dado pelo retorno médio do mercado.

Beach (2007) em seu trabalho definiu portfólios para 5, 10, 15 e 20 anos de investimentos, no mercado norte americano, com base em ações e títulos públicos. Para isso, fez uso da variância e da semivariância em relação ao retorno alvo. A pesquisa concluiu que para investimentos longos a recomendação é pelo uso da semivariância. Recentemente Estrada (2008) propôs uma abordagem heurística para geração de uma matriz simétrica e exógena para o cálculo da cosemivariância, utilizada na definição da semivariância do portfólio, considerando a semivariância em relação a um retorno alvo.

5.1.1.1. Semivariância em relação ao retorno médio

A semivariância do retorno da *i*-ésima ação em relação ao retorno médio μ_i, representada por S_i^2, para uma amostra, pode ser representada por:

$$S_i^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left[Min(r_{it} - \mu_i, 0)\right]^2}{n-1} \tag{5.1}$$

considerando que a função minimização Min indica que será elevado ao quadrado um dos valores, 0 ou $(r_i - \mu_i)$, quando $(r_i - \mu_i)$ corresponder a um número negativo.

Se a covariância mede a tendência como duas ações i e j se movem conjuntamente para cima e para baixo, com relação aos seus retornos, a cosemivariância mede a tendência como duas ações se movem conjuntamente para cima e para baixo, considerando apenas aqueles retornos abaixo do retorno médio.

$S_{ij,\mu}$ representa a cosemivariância para duas ações i e j, em relação ao retorno médio μ e é definida por:

$$S_{ij,\mu} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left[Min(r_{it} - \mu_i, 0).Min((r_{jt} - \mu_j, 0) \right]}{n-1} \tag{5.2}$$

5.1.1.2. Semivariância em relação ao retorno alvo

Com base nos trabalhos em Finanças a semivariância do retorno da *i*-ésima ação em relação ao retorno alvo B, representada por S_i^2, para uma amostra, pode ser representada por:

$$S_i^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left[Min(r_{it} - B, 0) \right]^2}{n-1} \tag{5.3}$$

considerando que a função minimização Min indica que será elevado ao quadrado um dos valores, 0 ou $(r_i - B)$, quando $(r_i - B)$ corresponder a um número negativo.

A cosemivariância em relação ao retorno alvo mede a tendência como duas ações se movem conjuntamente para cima e para baixo, considerando apenas aqueles retornos abaixo do valor alvo.

$S_{ij,B}$ representa a cosemivariância para duas ações i e j, em relação ao valor alvo B e, é definida por:

$$S_{ij,B} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left[Min(r_{it} - B, 0).Min((r_{jt} - B, 0) \right]}{n-1} \tag{5.4}$$

As definições dadas pelas equações (5.2) e (5.4) permitem que a cosemivariância entre as ações i e j seja igual a cosemivariância entre as ações j e i, o que não ocorre com algumas medidas de risco utilizadas em Finanças, a exemplo da proposta por Hogan and Warren (1974).

5.2. Seleção de portfólios com base na semivariância em relação ao retorno alvo

Para Estrada (2008) a seleção de portfólios com base na semivariância, considerando o valor alvo B, pode ser definida conforme equação (3.11), utilizada pelo modelo de média-variância de Markowitz (1952), sendo necessária a substituição da covariância pela cosemivariância, conforme equação (5.4). Então, a seleção de portfólios com base na média-semivariância, considerando que S_p^2 representa a semivariância do portfólio, é dada por:

$$Minimizar \quad S_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}^{n} S_{ij,B} x_i x_j \tag{5.5}$$

$$sujeito\ a \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \mu_p$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad para\ i = 1,...,n$$

5.3. Os problemas da matriz de cosemivariância

A sugestão de Markowitz (1959, apud Estrada, 2008, p.7) para definição da semivariância do portfólio, em relação a um retorno alvo B, é dada pela equação (5.5), considerando que $S_{ij,B}$ representa a matriz de cosemivariância, conforme:

$$S_{ij,B} = \sum_{t=1}^{n} \frac{(r_{it} - B).(r_{jt} - B)}{n-1} \tag{5.6}$$

Para Estrada (2008, p.7) a definição em (5.6) apresenta uma desvantagem, dada pelo uso da matriz de cosemivariância, que é endógena, uma vez que uma alteração nos pesos das ações afeta os períodos em que o portfólio esteve abaixo do retorno alvo, que por sua vez afeta os elementos da matriz de cosemivariância. Para o autor, o uso da equação (5.5) ao ser baseada no uso da equação (5.4) gera uma matriz simétrica e exógena para a cosemivariância e, permite que a matriz possa ser usada da mesma forma que a matriz de covariância (simétrica e exógena) é utilizada na seleção de portfólios de média-variância.

5.4. As vantagens da semivariância

A fronteira eficiente do modelo de média-semivariância é obtida pela otimização repetida para retornos esperados de diferentes portfólios, do intervalo determinado pelo retorno esperado do portfólio de mínima semivariância e máximo retorno esperado. Ou seja, adota o mesmo procedimento utilizado pelo modelo visto no Capítulo 3 desta dissertação.

Andrade (2006, p.35) explica que à medida que a preferência do investidor em relação ao risco se apresentar mais próximo do conceito assimétrico, a seleção de ações, buscando a minimização da semivariância, coloca-se em nível de superioridade em relação à seleção que faz uso da variância. Isto acontece porque a semivariância proporciona uma proteção em relação ao risco assimétrico à esquerda.

Assim, a seleção de portfólios com base na semivariância apresenta-se mais eficiente, uma vez que para o mesmo nível de retorno apresenta um menor risco, quando comparada com a fronteira com base na variância. A Figura 5.1 ao representar as duas fronteiras consegue mostrar essa situação. Considere, para isso, que a fronteira mais à esquerda representa a fronteira eficiente com base na semivariância em relação ao retorno médio.

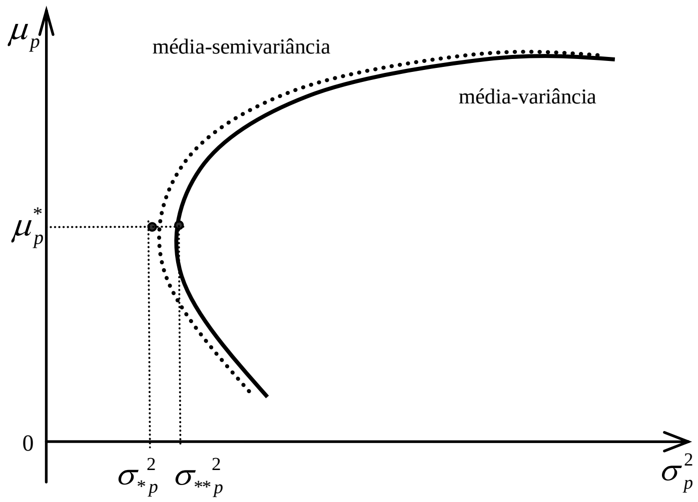

Figura 5.1 Fronteiras eficientes sem vendas a descoberto**.**
Fonte: Elaboração própria, 2009.

5.5. Efeito da assimetria no cálculo da variância e semivariância em relação ao retorno médio e retorno alvo

Quando os retornos de uma ação qualquer são normalmente distribuídos, então, a semivariância acaba se constituído na metade da variância. Para Nawrocki (1999) alguns pesquisadores chamam a medida semivariância de “meia variância”. Quando a distribuição dos retornos da ação não é normal a distribuição é inclinada ou assimétrica. Então, através da assimetria é possível definir a forma dessa distribuição. Assim, quando a assimetria de uma distribuição de retornos de uma ação é negativa, os retornos com perdas apresentam uma magnitude maior em relação aos retornos com ganhos, isto é, quanto as perdas ocorrem elas tendem a ser maiores. De outro modo, quando a assimetria da distribuição é positiva, os retornos com ganhos apresentam uma magnitude em relação aos retornos com perdas, isto é, quando as perdas ocorrem, elas tendem a ser menores.

Com base no comportamento das ações PETR4 e USIM5, no período de janeiro de 2002 a dezembro de 2006 foram definidos os valores dos retornos médios, variâncias, semivariâncias (retorno médio e retorno alvo) e terceiro momento bem como dos valores das covariâncias, cosemivariâncias e co terceiro momento das ações entre si. Em seguida, foram construídos alguns portfólios com essas ações, conforme Tabela 5.1. Os portfólios 1 e 11 acabam representam o investimento do recurso total em ações da USIM5 e PETR4, respectivamente.

Tabela 5.1 Resultados dos portfólios formados com ações PETR4 e USIM5 com base no período de janeiro de 2002 a dezembro de 2006.

Portfólios	PETR4 / USIM5	Retorno	Variância	Semivariância Média	Semivariância Alvo	Assimetria
1	0-100%	5,75%	1,90%	1,02%	0,68%	-0,00056
2	10-90%	5,49%	1,68%	0,92%	0,62%	-0,00052
3	20-80%	5,24%	1,49%	0,83%	0,57%	-0,00048
4	30-70%	4,98%	1,32%	0,74%	0,52%	-0,00042
5	40-60%	4,72%	1,18%	0,67%	0,48%	-0,00035
6	50-50%	4,46%	1,05%	0,60%	0,44%	-0,00028
7	60-40%	4,20%	0,96%	0,54%	0,41%	-0,00021
8	70-30%	3,94%	0,88%	0,50%	0,38%	-0,00014
9	80-20%	3,68%	0,83%	0,45%	0,36%	-0,00007
10	90-10%	3,42%	0,80%	0,42%	0,35%	0,00000
11	100-0%	3,16%	0,79%	0,40%	0,34%	0,00006

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Embora apresente o maior retorno, o portfólio 1 também é responsável pelas maiores variância e semivariância. Do lado oposto, o portfólio 11 apresenta o menor retorno seguido da menor variância e semivariância. Diferente dos retornos dos portfólios, que são definidos pela média ponderada dos retornos esperados de cada ação, os valores da variância e semivariância, sofrem influências das covariâncias e cosemivariâncias, respectivamente, das ações entre si, podendo, inclusive, apresentar um menor valor do que aquele apresentado pela ação individualmente. Já a definição do terceiro momento estatístico entre essas ações sofre influência dos co-terceiros momentos das ações e desta forma, seu valor não pode ser definido pela média ponderada dos co-terceiros momentos de cada ação.

Andrade (2006) concluiu em sua pesquisa que, dada a premissa de preferências assimétricas em relação ao risco, a escolha de ações no mercado acionário brasileiro, de acordo com critérios de minimização do risco assimétrico, é mais eficiente que a abordagem tradicional que leva em consideração a variância. Desta maneira, apesar da ação USIM5 apresentar retorno médio mais elevado do que a ação PETR4, como sua assimetria é negativa, existe uma grande probabilidade de perdas e poucas chances de ganho. Se o risco diminui com a assimetria positiva a variância e a semivariância acabam representando a diminuição desse risco, demonstrando o efeito da assimetria sobre essas medidas.

5.6. Uma nova proposta para seleção de portfólios

O objetivo primeiro desta pesquisa é o de utilizar a medida de risco semivariância em relação ao retorno alvo B, como parâmetro de risco, no modelo de programação por metas. Na definição da medida a cosemivariância adotada levará em consideração a equação (5.4). O uso do valor alvo B deve-se ao fato de que para a pesquisa os retornos abaixo do retorno do mercado, para o investidor, são indesejáveis. Desta maneira, a semivariância em relação ao retorno alvo B teve como parâmetro o retorno do mercado medido pelo IBOVESPA. Inicialmente, tem-se as seguintes definições matriciais:

$$Média = \mathrm{X}^T R \tag{5.7}$$

$$Semi\,\mathrm{var}\,iância = \mathrm{X}^T SV \mathrm{X} \tag{5.8}$$

considerando que a matriz R representa o retorno esperado para cada ação, a matriz de cosemivariância, na equação (5.8), é representada por SV e $\mathrm{X}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é a matriz transposta dos componentes do portfólio X, com x_i igual a porcentagem da riqueza investida nas ações i.

A porcentagem relativa das ações é o principal interesse da seleção de portfólio com assimetria, conforme Lai (1991). Mas, quando não são permitidas vendas a descoberto nem empréstimos à taxa livre de risco e as aplicações estão sujeitas ao patrimônio do investidor, a seleção de portfólio com base na semivariância deve ser modificada, conforme:

$MP)1$

$$Maximizar\ Z_1 = \mathrm{X}^T R \tag{5.9}$$

$$Maximizar\ Z_2 = 1 \big/ \mathrm{X}^T SV \mathrm{X} \tag{5.10}$$

$$sujeito\ a\ x_1 + x_2 + ... + x_i ... + x_n = 1 \tag{5.11}$$

$$x_i \geq 0\ \ para\ i = 1, ..., n \tag{5.12}$$

Canela e Collazo (2007, p.233) não replicaram outras pesquisas com um conjunto de dados diferentes ou períodos de amostra, mas forneceram uma revisão crítica da metodologia adotada por Lai (1991). Os autores defendem que, sob diferentes magnitudes do retorno esperado e da assimetria, o desvio d_i entre Z_i^* e Z_i pode ser dado conforme:

$$d_i = Z_i^* - Z_i \big/ Z_i^* \tag{5.13}$$

Então, na segunda etapa, a equação (5.14) representa as preferências do investidor através dos valores atribuídos a α e β e a solução da programação por metas corresponde a:

$MP2$

$$\text{Minimizar } Z = (1+d_1)^{\alpha} + (1+d_2)^{\beta} \tag{5.14}$$

$$\text{sujeito a } d_1 = Z_1^{*} - \mathrm{X}^{T} R \big/ Z_1^{*} \tag{5.15}$$

$$d_2 = {Z_2^{*} - 1/\mathrm{X}^{T} SV\mathrm{X}} \Big/ {Z_2^{*}} \tag{5.16}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_i \ldots + x_n = 1 \tag{5.17}$$

$$x_i \geq 0 \tag{5.18}$$

Por tratar-se de um problema de programação multiobjetivo, será discutido o uso desta programação, no Capítulo 6. Dentre os métodos disponíveis para sua solução será apresentado o método de programação por metas, conforme a definição de pesos para preferência do investidor por retorno e semivariância. Este tipo de problema, por apresentar uma função objetivo não linear com restrições não lineares, requer o uso do método direto de programação não linear, gradiente reduzido generalizado, conforme Anexo A.

6. Programação multiobjetivo

A programação multiobjetivo consiste na obtenção de um conjunto de variáveis que satisfaça algumas restrições e otimize uma função constituída por outras funções objetivo. Assim, o problema da programação multiobjetivo é dado por:

$$Minimizar \quad f_1(X), f_2(X), ..., f_k(X) \tag{6.1}$$

$$sujeito\ a$$

$$g_j(X) \le 0 \quad j = 1, 2, ..., m$$

considerando k o número de funções objetivo; X o espaço das decisões; $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$; $X^* = \{x \in X : g(x) \le 0\}$ representando o conjunto de soluções e $g(x)$ representando as restrições. Nesta pesquisa, o modelo proposto $MP1$, através das equações (5.9) a (5.12), no Capítulo 5, é um exemplo de problema de programação multiobjetivo.

Os problemas de programação multiobjetivo podem apresentar um conjunto incontável de soluções, que, quando analisadas, produzem vetores cujos componentes representam soluções eficientes que dão origem a conflitos no espaço de solução. A decisão deve ser tomada entre essas soluções.

6.1. Soluções para programação multiobjetivo

Num problema de programação multiobjetivo, quando são considerados objetivos conflitantes, em geral, não existe uma única solução que seja ótima com respeito a todos os objetivos. Desta forma, uma solução x_1 é considerada não dominada por uma solução x_2 se as condições abaixo são verificadas:

- $\forall i : f_i(x_1) \le f_i(x_2)$;
- $\exists i : f_i(x_1) < f_i(x_2)$;

Todas as soluções não dominadas do espaço das decisões X formam o conjunto Pareto-ótimo. As soluções do conjunto Pareto-ótimo são também conhecidas como não inferiores ou soluções eficientes, de forma que seus vetores são definidos como vetores não dominados. Quando são plotados no espaço objetivo, esses vetores não dominados são conhecidos como fronteira de Pareto e o conjunto Pareto-ótimo é um subconjunto de todas as possíveis soluções no espaço de solução.

Para Zitzler et al (2000, p.174), essas soluções são definidas como ótimas no sentido de que nenhuma outra solução no espaço de solução é superior a elas, quando todos os objetivos são considerados.

A solução da programação multiobjetivo consiste em determinar, no espaço de decisões, o conjunto eficiente, um subconjunto do conjunto eficiente, ou o conjunto de soluções próximas da fronteira de Pareto. Portanto, o tamanho e a complexidade dos métodos de solução, encontrados em grande parte nos problemas práticos, exigem a intervenção de um tomador de decisão. Rao (1999, p.780) explica que vários métodos foram desenvolvidos para resolver problemas multiobjetivo, a exemplo do método de programação por metas, do método da função utilidade, do método do critério global e do método lexicográfico.

6.1.1. Método de programação por metas

Hu et al (2007, p.1319) explicam que a programação por metas foi inicialmente introduzida por Charnes e Cooper no início dos anos 60, constituindo-se num método útil para o tomador de decisão considerar simultaneamente muitas metas para uma solução satisfatória. Para os autores, trata-se de uma ferramenta robusta para problemas de tomada de decisão multiobjetivo.

Em Finanças, Lee e Lerro (1973) são pioneiros no uso da técnica para determinar o portfólio ótimo de um conjunto de ações. Em seguida, Kumar et al (1978) também utilizaram o método para seleção de fundos de investimentos. Nessas pesquisas, apenas o retorno esperado e a variância foram considerados.

Para Rao (1996, p.783) deve-se estabelecer metas para as funções objetivo. Em seguida, a solução ótima é definida como aquela que minimiza os desvios em relação às metas estabelecidas. O método da programação por metas é representado conforme:

$$Mimimizar\ (d_i^+)^p + (d_j^+)^k,\ \ p,k \geq 1 \tag{6.2}$$

sujeito a

$$g_i(X) \leq 0,\ \ j = 1,2,...,m \tag{6.3}$$

$$g_j(X) \leq 0,\ \ j = 1,2,...,m \tag{6.4}$$

$$f_i(X) + d_i^+ = b_i\ \ i = 1,2,...,n \tag{6.5}$$

$$f_j(X) + d_J^+ = b_j\ \ j = 1,2,...,n \tag{6.6}$$

$$d_i^+ \geq 0,\ \ i = 1,2,...,n \tag{6.7}$$

$$d_j^+ \geq 0,\ \ j = 1,2,...,n \tag{6.8}$$

considerando que b_i e b_j são as metas definidas para a funções $f_i(X)$ e $f_j(X)$, d_i^+ e d_i^+ são os desvios positivos, em relação a meta e os valores de p e k representam a preferência definida pelo tomador de decisão. Para isso, as metas b_i e b_j, das funções objetivo $f_i(X)$ e $f_j(X)$ são definidas pela primeira vez, por:

$$Mimimizar\ f_i(X) \tag{6.9}$$

sujeito a

$$g_j(X) \leq 0,\ \ j = 1,2,...,m$$

bem como:

$$Mimimizar\ f_j(X) \tag{6.10}$$

sujeito a

$$g_i(X) \leq 0,\ \ j = 1,2,...,m$$

A solução do problema proposto em $MP2$, através das equações (5.13) a (5.17), no Capítulo 5, é um exemplo de resolução através do método de programação por metas, de forma que as preferências sobre as metas são definidas pelo investidor.

A característica especial da programação por metas é a forma de critério de decisão. Ao contrário da avaliação direta dos resultados, o método introduz inicialmente o valor meta desejado para cada critério individualmente, minimizando, em seguida, os desvios dos resultados destes objetivos. Portanto, a solução depende das métricas usadas para os desvios e também da preferência dada aos diferentes objetivos.

Há dois métodos de ponderação comuns. O primeiro acontece através da ordenação de metas fixas e o segundo pelo uso de preferências sobre as metas e pela minimização da soma desses desvios. De qualquer maneira, o uso da programação por metas tem recebido crescente interesse em razão da sua flexibilidade de modelar e simplicidade conceitual, conforme explicam Hu et al (2007, p.1320).

6.2. O uso da programação não linear

A solução para um problema de otimização consiste em encontrar o melhor conjunto de valores para uma função objetivo, conforme equação (6.11). Em geral, podem existir soluções que são localmente ótimas, mas não globalmente ótimas. Os problemas de solução global são mais difíceis para serem resolvidos num contexto dos problemas múltiplos.

6.2.1. Função objetivo com restrições

Para alguns problemas de programação não linear pode ser interessante encontrar a solução global. Assim, o problema que busca uma solução global, com restrições, para uma função pode ser dado por:

$$Mimimizar\ f(X) \tag{6.11}$$

$$sujeito\ a$$

$$g(X) = 0,\ \ k = 1, 2, ..., l$$

$$h(X) \leq 0,\ \ j = 1, 2, ..., m$$

onde x denota o vetor de variáveis de otimização, $f(X)$ a função objetivo e, $g(X)$ bem como $h(X)$, as restrições de igualdade ou desigualdade, respectivamente.

Friedlander (1994, p.7) explica que $x^* \in X$ representa um minimizador global de f em X, se e somente se, $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in X$. Agora, se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in X$, tal que $x \neq x^*$, para a autora, trata-se de um minimizador global em X. Desta forma, além da função objetivo tem-se um conjunto de igualdades ou desigualdades que formam o conjunto das restrições.

Os métodos de programação não linear com restrições são classificados por Rao (1996, p.429) em duas categorias: diretos e indiretos. Na primeira categoria temos o método do gradiente reduzido generalizado. O gradiente é usado para resolução do problema multiobjetivo, proposto pela programação por metas e, utilizado na resolução dos problemas de seleção de portfólios descritos pelas equações de (5.9) a (5.12) e pelas equações de (5.13) a (5.17), através do pacote computacional Lingo, versão 11. No Anexo B a implementação computacional para o modelo proposto é definida.

No capítulo sete serão apresentados os procedimentos utilizados na pesquisa, os critérios para seleção das ações e os resultados obtidos conforme as preferências do investidor para o modelo proposto, bem como para os modelos com base no trabalho de Markowitz (1952) e Lai (1991). Em seguida, a conclusão bem como as limitações desta pesquisa. Para finalizar serão apresentadas sugestões para novos trabalhos sobre o assunto.

7. Aplicação dos modelos, resultados da pesquisa, conclusões e sugestões

Para a realização da pesquisa foram utilizados dois grupos de dez ações pertencentes aos portfólios teóricos da BOVESPA. No grupo 1 foram alocadas dez ações, no ano de 2006 e, que representam juntas, 60% do IBOVESPA. No grupo 2, foram alocadas aleatoriamente dez ações que fazem parte do grupo de ações que representam os 40% restantes do IBOVESPA.

Em seguida, com base nos retornos históricos mensais, no período de janeiro de 2002 a dezembro de 2006, foram definidas as matrizes de variância, semivariância e do terceiro momento, além dos retornos médios de cada ação. Com base nessas informações, os modelos de seleção de portfólios foram implementados para o mês de janeiro de 2007.

Após a definição das participações percentuais relativas dos componentes dos portfólios, para o mês de janeiro de 2007, os modelos de seleção são implementados, novamente, para o mês de fevereiro. Para isso, são usados os retornos históricos de fevereiro de 2002 a janeiro de 2007. O critério de eliminação do primeiro mês da série e a utilização do mês mais recente foi mantido para definição das próximas participações percentuais, de cada ação nos portfólios, para o ano de 2007.

7.1. Preferências do investidor na programação por metas

Para Lai (1991, p.296), quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, a solução da programação por metas é um caso especial do portfólio eficiente de média-variância. Quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, conforme Prakash et al (2003, p.1384), a solução representa o portfólio eficiente com base na média-variância-assimetria. Se $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, a solução também representa o portfólio eficiente com base na média-variância-assimetria, no entanto, o investidor tem uma maior preferência por retorno.

Para a pesquisa não são permitidas vendas a descoberto nem empréstimos bem como as aplicações estão sujeitas ao patrimônio total do investidor. A seleção em $MP2$ segue as preferências do investidor através dos valores atribuídos a α e β, levando em consideração a equação (5.13).

- para as equações (3.17) a (3.20), quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, o investidor apresenta igual preferência por retorno e variância;
- para as equações (4.18) a (4.21), quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, o investidor apresenta igual preferência por retorno e assimetria;
- para as equações (5.9) a (5.12), quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, o investidor apresenta igual preferência por retorno e semivariância

Para as três situações acima, quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, o investidor apresenta uma maior preferência em relação ao retorno. Em relação à diversificação, todos os modelos de seleção consideraram uma participação percentual não superior a 30% por ação.

7.2. Resultados obtidos com base no retorno e variância

Nesta seção são mostrados os resultados obtidos considerando que o investidor apresenta preferências por retorno esperado e variância. Além das informações sobre retorno esperado e variância outras medidas são fornecidas sobre o desempenho dos grupos 1 e 2.

Tabela 7. 1 Resultados do grupo 1 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2007, conforme preferências do investidor por retorno esperado e variância.

Preferênciais		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	48.77%	49.33%
Retorno Médio	4.06%	4.11%
Variância	0.16%	0.18%
Semivariância	0.06%	0.07%
Assimetria	-0.3387	-0.3487

Fonte: Elaboração própria, 2009.

A Tabela 7.1 mostra que o maior retorno é definido para o grupo 1 quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Com base nessa preferência, o modelo de seleção, durante o ano 2007, gerou um portfólio com um maior retorno e maior variância. Por outro lado, quando o investidor adota a preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ o resultado da seleção de portfólios é compensado com um menor risco, medido pela variância.

Para o grupo 2, conforme Tabela 7.2, o maior retorno foi obtido com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Desta maneira, quando o investidor adota uma maior preferência por retorno (que acabou não ocorrendo) o resultado da seleção é compensado com um maior risco.

Como o modelo de seleção definido com base na variância não apresenta preocupação com a concentração dos resultados, percebe-se que as duas preferências são responsáveis por uma assimetria negativa, para os grupos 1 e 2.

Tabela 7.2 Resultados do grupo 2 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2007, conforme preferências do investidor por retorno esperado e variância.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	17.08%	16.65%
Retorno Médio	1.42%	1.39%
Variância	0.14%	0.15%
Semivariância	0.14%	0.15%
Assimetria	-0.0179	-0.2421

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Para as seções 7.3.1, 7.4.1 e 7.5.1, seria inviável analisar as mudanças percentuais em cada ação entre as preferências $\alpha = 1$ $\beta = 1$ e $\alpha = 3$ $\beta = 1$. Assim, foram relacionadas as mudanças significativas em termos de alteração percentual, considerando para isso as mudanças iguais ou maiores que 10%.

7.2.1. Preferências por retorno e variância e a composição dos portfólios de ações

As Tabelas 7.3 e 7.4 indicam a composição percentual dos portfólios formados com base nas preferências entre retorno e variância para o grupo 1. No período de janeiro até maio de 2007 o portfólio definido com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ conta com a participação da PETR4, o que não ocorre quando a combinação é definida por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Isto também acontece em relação à ação TNLP4, no período de janeiro a julho e nos meses de novembro e dezembro de 2007.

Tabela 7.3 Composição do portfólio para o grupo 1 com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e variância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
PETR4	19%	14%	9%	26%	15%	-	-	11%	19%	22%	30%	30%
VALE5	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	23%	25%
TNLP4	29%	19%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	27%	26%
BBDC4	12%	5%	3%	-	-	-	-	-	-	-	-	-
USIM5	-	-	7%	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ITAU4	-	18%	11%	-	3%	6%	-	-	-	-	8%	10%
CSNA4	-	-	5%	14%	15%	27%	24%	21%	12%	9%	10%	9%
GGBR4	-	-	4%	-	4%	-	-	-	-	-	-	-
ELET6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CPLE6	10%	15%	2%	-	3%	7%	16%	8%	9%	10%	1%	-
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Tabela 7.4 Composição do portfólio para o Grupo 1 com base na preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e variância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
PETR4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6%	30%	30%
VALE5	30%	30%	30%	30%	30%	30%	27%	30%	27%	30%	30%	30%
TNLP4	-	-	-	-	-	-	-	30%	30%	30%	-	-
BBDC4	30%	30%	17%	-	-	-	-	-	-	-	10%	-
USIM5	-	-	30%	30%	10%	30%	-	10%	-	-	-	2%
ITAU4	25%	26%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8%
CSNA4	-	-	-	30%	30%	30%	30%	30%	30%	29%	30%	30%
GGBR4	-	-	23%	10%	30%	-	18%	-	-	-	-	-
ELET6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CPLE6	15%	14%	-	-	-	10%	24%	-	13%	5%	-	-
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

A covariância de PETR4 e TNLP4, nos períodos observados, entre si e com outras ações é fator relevante para essa participação no portfólio.

As ações BBDC4, no período de janeiro a março de 2007; USIM5, no período de março a junho de 2007 e no mês de agosto; CSNA4, no período de setembro a dezembro e GGBR4, no período de março a maio de 2007 e no mês de julho, tiveram uma maior participação no portfólio quando o investidor adotou a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Isto se deve ao fato de que BBDC4, USIM5, CSNA4 e GGBR4 nos períodos observados, apresentaram um maior retorno, conforme Anexo C.

As Tabelas 7.5 e 7.6 indicam a composição percentual dos portfólios formados com base nas preferências entre retorno e variância para o grupo 2 de ações. No período de fevereiro até julho de 2007 o portfólio definido com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ conta com a participação da EMBR3, o que não ocorre quando a preferência é definida por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Além da EMBR3, a ação AMBV4, nos meses de fevereiro e outubro de 2007 apresentou uma maior participação percentual no portfólio. A ação VCPA4, no período de fevereiro a agosto de 2007, também apresentou uma maior participação no portfólio. Ou seja, as ações EMBR3, AMBV4 e VCPA4 nos períodos observados, apresentaram menores correlações entre si e com outras ações. As ações VIVO4, nos meses de janeiro, fevereiro e maio de 2007; ITSA4, nos meses de março, abril junho e julho de 2007 e BBAS3, no período de fevereiro a dezembro de 2007, apresentaram uma maior participação no portfólio quando o investidor adotou uma maior participação por retorno. Ao assumir a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ o investidor acaba compensando a maior preferência por retorno por uma maior variância.

Tabela 7.5 Composição do portfólio para o grupo 2 com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e variância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
AMBV4	9%	13%	-	17%	25%	30%	30%	30%	30%	12%	18%	4%
VIVO4	8%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4%
EBTP4	3%	3%	-	-	4%	4%	7%	5%	17%	14%	10%	8%
ITSA4	1%	2%	5%	15%	5%	16%	5%	-	9%	15%	16%	15%
SDIA4	29%	30%	28%	5%	13%	10%	6%	-	-	12%	15%	22%
EMBR3	8%	13%	16%	12%	13%	8%	10%	-	-	-	-	-
BBAS3	4%	8%	13%	10%	-	-	5%	16%	5%	10%	11%	9%
ARCZ6	3%	4%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VCPA4	30%	21%	25%	23%	18%	16%	18%	30%	30%	30%	29%	30%
KLBN4	4%	6%	13%	18%	22%	16%	19%	20%	9%	8%	1%	7%
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Tabela 7.6 Composição do portfólio para o Grupo 2 com base na preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e variância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
AMBV4	-	-	-	**10%**	**29%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	-	**30%**	-
VIVO4	30%	30%	-	-	11%	-	-	-	-	**6%**	-	-
EBTP4	-	-	-	-	-	-	-	-	**21%**	**6%**	**4%**	-
ITSA4	-	**10%**	30%	30%	-	30%	10%	-	-	-	-	-
SDIA4	**30%**	**30%**	**30%**	-	-	-	-	-	-	-	**4%**	**19%**
EMBR3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BBAS3	**10%**	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	17%	30%	30%	30%
ARCZ6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**15%**	**2%**	**21%**
VCPA4	**30%**	-	-	-	-	-	-	**10%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**
KLBN4	-	-	**10%**	**30%**	**30%**	**10%**	**30%**	**30%**	**2%**	**14%**	-	-
TOTAL	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Em resumo, quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, o grupo 1 apresenta um maior retorno e uma maior variância. Por outro lado, quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, o grupo 2 apresenta um maior retorno e uma menor variância. Isto acontece porque as ações, quando analisadas individualmente, apresentaram ao longo dos períodos de formação de portfólios pequenas variações em relação ao retorno médio.

Disponíveis nas Tabelas 7.1 e 7.2, os resultados da seleção de portfólios com base nas duas combinações de preferenciais por retorno esperado e variância não conseguem indicar uma combinação superior uma vez que as diferenças nominais entre os resultados não é superior a 1%, nem em termos de variância nem em termos de retorno esperado.

7.3. Resultados obtidos com base no retorno e assimetria

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos considerando que o investidor apresenta preferência por retorno esperado e assimetria. Além das informações sobre retorno esperado e assimetria outras medidas são fornecidas sobre o desempenho dos grupos 1 e 2.

Tabela 7.7 Resultados do grupo 1 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2007, conforme preferências do investidor por retorno esperado e assimetria.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	61.79%	46.41%
Retorno Médio	5.15%	3.87%
Variância	0.21%	0.14%
Semivariância	0.03%	0.07%
Assimetria	0.4413	-0.8464

Fonte: Elaboração própria, 2009.

A Tabela 7.7 mostra que o maior retorno é obtido, para o grupo 1, quando o investidor apresenta a preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Agora, quando o investidor adota a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, uma maior preferência por retorno (que acabou não ocorrendo) é compensada por uma menor assimetria. Como o modelo de seleção definido com base na assimetria preocupa-se com a concentração dos resultados, percebe-se que a primeira estratégia é responsável por uma assimetria positiva.

No grupo 2 o resultado entre as preferências por retorno esperado e assimetria não foi diferente. Ou seja, o maior retorno foi obtido quando o investidor apresentou a preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. No entanto, diferentemente do grupo 1, as duas estratégias foram responsáveis por uma assimetria positiva, conforme Tabela 7.8.

Tabela 7.8 Resultados do grupo 2 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2007, conforme preferências do investidor por retorno esperado e assimetria.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	29.4%	8.3%
Retorno Médio	2.5%	0.7%
Variância	0.2%	0.1%
Semivariância	0.1%	0.2%
Assimetria	1.4801	0.1229

Fonte: Elaboração própria, 2009.

7.3.1. Preferências por retorno e assimetria e a composição dos portfólios de Ações

As Tabelas 7.9 e 7.10 indicam a composição percentual dos portfólios formados com base nas preferências entre retorno e assimetria para o grupo 1 de ações. Nos meses de abril, maio, agosto, setembro e outubro de 2007 o portfólio definido com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ conta com a participação da ação PETR4, o que não ocorre quando a combinação e definida por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Isto também acontece com as ações BBDC4 nos meses de março e outubro de 2007; USIM5 no mês de novembro de 2007 e ITAU4 nos meses de abril e novembro 2007 e no período de junho a setembro de 2007.

Tabela 7.9 Composição do portfólio para o grupo 1 com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e assimetria.

	jan/07	**fev/07**	**mar/07**	**abr/07**	**mai/07**	**jun/07**	**jul/07**	**ago/07**	**set/07**	**out/07**	**nov/07**	**dez/07**
PETR4	-	**1%**	-	10%	10%	**7%**	**6%**	10%	10%	30%	**30%**	**30%**
VALE5	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	-	-	**30%**
TNLP4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BBDC4	**10%**	**9%**	10%	-	-	-	-	-	-	10%	**30%**	**30%**
USIM5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24%	-
ITAU4	**30%**	**30%**	**30%**	30%	**30%**	30%	30%	30%	30%	**30%**	16%	-
CSNA4	-	-	-	-	-	**3%**	**4%**	-	-	-	-	**10%**
GGBR4	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	-	-
ELET6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CPLE6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
TOTAL	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Tabela 7. 10 Composição do portfólio para o grupo 1 com base na preferência por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e assimetria.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
PETR4	10%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30%	30%
VALE5	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
TNLP4	-	-	-	-	-	-	-	21%	30%	4%	-	-
BBDC4	30%	30%	-	12%	-	-	-	-	-	-	30%	30%
USIM5	-	-	10%	28%	-	-	-	-	-	-	-	-
ITAU4	30%	30%	30%	-	30%	15%	-	-	-	30%	-	-
CSNA4	-	-	-	-	10%	25%	14%	19%	10%	6%	10%	10%
GGBR4	-	10%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	-	-
ELET6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CPLE6	-	-	-	-	-	-	26%	-	-	-	-	-
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

As interações curvilíneas das ações PETR4, BBDC4, USIM5 e ITAU4, entre si e com outras ações é fator relevante para a participação dessas ações no portfólio, no período observado. Quando há uma maior preferência por retorno as ações VALE5, nos meses de outubro e novembro de 2007; TNLP4, nos meses de agosto e setembro de 2007; BBDC4, nos meses de janeiro, fevereiro e abril de 2007; USIM5, nos meses de março e abril de 2007; CSNA4, no período de maio a setembro de 2007 e no mês de novembro e CPLE6, no mês de julho de 2007 aumentam sua participação na composição dos portfólios, uma vez que apresentaram maiores retornos, conforme Anexo C. As Tabelas 7.11 e 7.12 indicam a composição percentual dos portfólios formados com base nas preferências entre retorno e assimetria para o grupo 2 de ações.

Tabela 7.11 Composição do portfólio para o grupo 2 com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e assimetria.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
AMBV4	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	-	30%	30%	-	-
VIVO4	30%	30%	30%	30%	30%	30%	-	30%	30%	30%	-	-
EBTP4	-	-	-	-	-	-	-	30%	-	-	-	-
ITSA4	23%	19%	29%	30%	28%	27%	10%	10%	30%	30%	-	-
SDIA4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	10%	10%	10%
EMBR3	17%	21%	11%	10%	12%	13%	-	-	10%	-	30%	30%
BBAS3	-	-	-	-	-	-	30%	30%	-	-	-	-
ARCZ6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30%	30%
VCPA4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30%	30%
KLBN4	-	-	-	-	-	-	30%	-	-	-	-	-
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Tabela 7.12 Composição do portfólio para o grupo 2 com base na preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e assimetria.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
AMBV4	30%	30%	-	30%	30%	30%	30%	30%	30%	10%	-	-
VIVO4	30%	30%	-	-	30%	30%	-	-	30%	30%	30%	-
EBTP4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30%	-
ITSA4	8%	3%	30%	30%	30%	30%	10%	10%	30%	30%	-	10%
SDIA4	30%	30%	30%	-	-	-	-	-	-	-	-	30%
EMBR3	2%	7%	30%	13%	10%	10%	-	-	-	-	-	-
BBAS3	-	-	-	27%	-	-	30%	30%	-	30%	30%	-
ARCZ6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30%
VCPA4	-	-	10%	-	-	-	-	-	10%	-	10%	30%
KLBN4	-	-	-	-	-	-	30%	30%	-	-	-	-
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

No mês de março de 2007 quando o portfólio é definido com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ conta a participação percentual da ação AMBV4. Isto ocorre também com as ações VIVO4, nos meses de março e abril de 2007; EBTP4 no mês de agosto de 2007; ITSA4 nos meses de janeiro e fevereiro de 2007; SDIA4 nos meses de outubro e novembro de 2007; EMBR3, nos meses de janeiro, fevereiro, setembro e novembro de 2007 e ARCZ6 e VCPA4 no mês de novembro de 2007. As interações curvilíneas das ações AMBV4, VIVO4, EBTP4, ITSA4, SDIA4, EMBR3, ARCZ6 e VCPA4, nos períodos observados, é fator relevante para participação dessas ações no portfólio.

As ações EBTP4, no mês de novembro de 2007; SDIA4, no período de janeiro a março de 2007 e no mês de dezembro; EMBR3 no mês de março de 2007; BBAS3 no mês de abril e no período de outubro a novembro de 2007; VCPA4 nos meses de março e setembro de 2007 e KLBN4 no mês de agosto, apresentaram uma maior participação no portfólio quando o investidor adotou a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Ou seja, essas ações aumentam sua participação na composição dos portfólios, uma vez que apresentaram maiores retornos, conforme Anexo D.

Em resumo, quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, o grupo 1 e o grupo 2 apresentam um maior retorno e uma maior assimetria. Isto acontece porque as ações, quando analisadas individualmente, apresentaram ao longo dos períodos de formação dos portfólios pequenas variações em relação ao retorno médio. Ou seja, se o beneficio gerado pelo aumento da assimetria é compensado pelo aumento da dispersão isto acaba não ocorrendo com grupos 1 e 2, uma vez que as ações não apresentaram ao longo dos períodos grandes dispersões.

Disponíveis nas Tabelas 7.7 e 7.8, os resultados da seleção de portfólios com base nas duas combinações de preferenciais por retorno esperado e assimetria conseguem indicar que a combinação $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ é superior a combinação $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ uma vez que as diferenças nominais entre os resultados é superior a 1% em termos de retorno esperado e de assimetria.

7.4. Relação entre o valor alvo *B* e o retorno médio das ações

Com base nos Anexos C e D é possível verificar os valores para o retorno médio do mercado, utilizado como retorno alvo para o cálculo da semivariância, nesta pesquisa, e os retornos médios das ações dos grupos 1 e 2.

Em relação ao grupo 1, o período de formação dos portfólios Set02 a Ago07 foi o período que apresentou o maior número de ações (oito) com retorno médio superior ao retorno médio de mercado. O período de Ago02 a Jul07 apresentou seis ações com retorno médio superior ao retorno médio de mercado. Os períodos de Jun02 a Mai07, Jul02 a Jun07 e Nov02 a Out07 apresentaram cinco ações com retorno médio superior ao retorno médio do mercado. Os períodos de Abr02 a Mar07, Mai02 a Abri07, Out02 a Set07 e Dez02 a Nov07 apresentaram quatro ações com retorno superior ao do mercado. O período de Jan02 a Dez06 apresentou três ações com valores superiores ao retorno médio de mercado. Os demais períodos apresentaram duas ações com retornos superiores ao retorno médio do mercado. Então, o uso da semivariância em relação ao retorno alvo permite a formação de portfólios com base num maior número de ações.

Em relação ao grupo 2, os períodos de formação dos portfólios Jan02 a Dez06, Fev02 a Jan07 e Mai02 a Abr07 foram os períodos que apresentaram o maior número de ações (cinco ações) com retorno médio superior ao retorno médio do mercado. Em Mar02 a Fev07, Jun02 a Mai07, Jul02 a Jun07 e Set02 a Ago07 apresentaram quatro ações com retornos médios superiores ao retorno de mercado. Os períodos de Abr02 a Mar07, Ago02 a Jul07, Out02 a Set07 e Nov02 a Out07 foram os períodos que apresentaram o menor número de ações (duas ações) com retornos superiores ao retorno médio do mercado. Os períodos de Jan02 a Dez06, Fev02 a Jan07 e Mar02 a Fev07 apresentaram, respectivamente, três, uma e duas ações com retornos médios superiores ao retorno médio do mercado. Semelhante ao grupo 1, o uso da semivariância permite a formação de portfólios com base num maior número de ações.

7.5. Resultados obtidos com base no retorno e semivariância

Nesta seção serão mostrados os resultados obtidos considerando que o investidor apresenta preferência por retorno esperado e semivariância em relação ao retorno alvo B. Além das informações sobre retorno esperado e semivariância outras medidas são fornecidas sobre o desempenho dos grupos 1 e 2.

Tabela 7. 13 Resultados do grupo 1 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2007, conforme preferências do investidor por retorno esperado e semivariância.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	47.13%	49.77%
Retorno Médio	3.93%	4.15%
Variância	0.15%	0.20%
Semivariância	0.06%	0.07%
Assimetria	0.0127	-0.1675

Fonte: Elaboração própria, 2009.

A Tabela 7.13 mostra que o maior retorno é definido para o grupo 1, quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Com base nesta combinação de preferência, o modelo de seleção, durante o ano de 2007, gerou um portfólio com maior retorno e maior semivariância. Por outro lado, quando o investidor adota a preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, uma menor preferência pelo retorno é compensada por um menor risco, medido agora pela semivariância.

O modelo não preocupa-se com a concentração dos resultados. Assim, quando a preferência é $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ a seleção é responsável por assimetria positiva, o que não ocorre quando a combinação $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ é utilizada pelo modelo de seleção de portfólios.

Para o grupo 2, conforme Tabela 7.14, não foi possível definir o maior retorno uma vez que as duas estratégias apresentaram resultados próximos, tanto para o valor esperado bem como para semivariância. Em relação à concentração dos resultados, enquanto a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ definiu assimetria positiva, a combinação $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ definiu assimetria negativa.

Tabela 7.14 Resultados do grupo 2 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2007, conforme preferências do investidor por retorno esperado e semivariância.

Preferência		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	19.15%	19.22%
Retorno Médio	1.60%	1.60%
Variância	0.18%	0.18%
Semivariância	0.17%	0.16%
Assimetria	-0.1190	0.1033

Fonte: Elaboração própria, 2009.

7.5.1. Preferências por retorno e semivariância e a composição dos portfólios de ações

As Tabelas 7.15 e 7.16 indicam a composição percentual dos portfólios formados com base nas preferências entre retorno e semivariância para o grupo 1. Nos meses de janeiro e fevereiro de 2007 e no mês de abril o portfólio definido com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ conta em sua composição com uma maior participação da ação PETR4, o que não ocorre quando a combinação é definida por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Isto também ocorre em relação a ação ITAU4, no período de março a junho de 2007. A cosemivariância das ações PETR4, e ITAU4 nos períodos observados, entre si e com outras ações é fator importante para sua participação no portfólio.

Tabela 7. 15 Composição do portfólio para o grupo 1 com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e semivariância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
PETR4	23%	12%	-	18%	-	-	-	-	-	**5%**	**30%**	**30%**
VALE5	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**24%**	**29%**
TNLP4	-	-	-	-	**3%**	**5%**	**5%**	**30%**	**30%**	**15%**	-	-
BBDC4	**30%**	**22%**	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
USIM5	-	-	**10%**	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ITAU4	**17%**	**30%**	30%	12%	19%	27%	-	**4%**	**10%**	**30%**	**28%**	**30%**
CSNA4	-	-	-	**25%**	**19%**	**30%**	**30%**	**30%**	**30%**	**19%**	**18%**	**11%**
GGBR4	-	**6%**	**30%**	**15%**	**30%**	**8%**	**29%**	**6%**	-	-	-	-
ELET6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CPLE6	-	-	-	-	-	-	**6%**	-	-	-	-	-
TOTAL	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**	**100%**

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Tabela 7. 16 Composição do portfólio para o grupo 1 com base na preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e semivariância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
PETR4	10%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30%	30%
VALE5	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	10%	30%	30%	30%	30%
TNLP4	-	-	-	-	-	-	-	30%	30%	30%	-	-
BBDC4	30%	30%	10%	-	-	-	-	-	-	-	10%	-
USIM5	-	-	30%	30%	10%	30%	-	30%	-	-	-	-
ITAU4	30%	30%	-	-	-	-	-	-	-	10%	-	10%
CSNA4	-	-	-	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
GGBR4	-	-	30%	10%	30%	10%	30%	-	5%	-	-	-
ELET6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CPLE6	-	10%	-	-	-	-	10%	-	5%	-	-	-
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

As ações BBDC4, no mês de março de 2007; USIM5 no período de março a junho de 2007 e no mês agosto de 2007 além da ação CPLE6 no mês de fevereiro de 2007 tiveram uma maior participação no portfólio quando o investidor adotou a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Isto deve-se ao fato de que essas ações nos períodos observados apresentaram um maior retorno, conforme Anexo C.

As Tabelas 7.17 e 7.18 indicam a composição percentual dos portfólios formados com base nas preferências entre retorno e semivariância para o grupo 2. Nos meses de janeiro e fevereiro de 2007 e no mês de abril o portfólio definido com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ conta com uma maior participação da ação AMVB4, o que não ocorre quando a preferência é definida por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Além da AMVB4, as ações ITSA4, nos meses de janeiro e fevereiro e no período de outubro a dezembro de 2007 e VCPA4, no período de janeiro a maio de 2007, também apresentaram uma maior participação no portfólio.

Tabela 7.17 Composição do portfólio para o grupo 2 com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e semivariância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
AMBV4	13%	19%	-	23%	30%	30%	30%	30%	30%	-	10%	-
VIVO4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
EBTP4	-	-	-	-	-	-	-	-	5%	1%	-	-
ITSA4	23%	21%	29%	30%	26%	30%	19%	-	23%	30%	28%	30%
SDIA4	30%	30%	30%	-	3%	4%	-	-	-	-	2%	18%
EMBR3	4%	4%	6%	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BBAS3	-	-	3%	6%	-	1%	21%	29%	4%	30%	30%	13%
ARCZ6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
VCPA4	30%	26%	27%	11%	11%	6%	-	11%	30%	30%	30%	30%
KLBN4	-	-	5%	30%	30%	30%	30%	30%	8%	9%	-	9%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Tabela 7. 18 Composição do portfólio para o grupo 2 com base na preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, para retorno esperado e semivariância.

	jan/07	fev/07	mar/07	abr/07	mai/07	jun/07	jul/07	ago/07	set/07	out/07	nov/07	dez/07
AMBV4	-	-	-	10%	30%	30%	30%	30%	30%	-	26%	-
VIVO4	30%	30%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
EBTP4	-	-	-	-	-	-	-	-	17%	-	-	-
ITSA4	-	10%	30%	30%	10%	30%	10%	-	-	10%	14%	-
SDIA4	30%	30%	30%	-	-	-	-	-	-	-	-	10%
EMBR3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
BBAS3	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
ARCZ6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30%
VCPA4	10%	-	-	-	-	-	-	10%	23%	30%	30%	30%
KLBN4	-	-	10%	30%	30%	10%	30%	30%	-	30%	-	-
TOTAL	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Por outro lado, as ações VIVO4, nos meses de janeiro e fevereiro de 2007; EBTP4, no mês de setembro de 2007; BBAS3, no período de janeiro a maio de 2007 e nos meses de setembro e dezembro; ARCZ6 no mês de dezembro de 2007 e KLBN4 no mês de outubro de 2007 apresentaram uma maior participação no portfólio quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Assim, ao assumir uma maior preferência por retorno o investidor acabou compensando tal preferência por uma maior semivariância. Isto deve-se ao fato de que essas ações nos períodos observados apresentaram um maior retorno, conforme Anexo D.

Em resumo, quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, o grupo 1 apresenta um maior retorno e uma maior semivariância. Por outro lado, quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, o grupo 2 apresentou-se indiferente. Isto acontece porque as ações, quando analisadas individualmente, apresentaram ao longo dos períodos de formação de portfólios pequenas variações em relação ao retorno médio.

Disponíveis nas Tabelas 7.13 e 7.14, os resultados da seleção de portfólios com base nas duas combinações de preferenciais por retorno esperado e semivariância conseguem uma combinação superior para o grupo 1, quando $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. No entanto, não há uma combinação superior para o grupo 2, uma vez que as diferenças nominais entre os resultados não é superior a 1%, nem termos de semivariância nem em termos de retorno esperado.

7.6. Conclusões, limitações e sugestões da pesquisa

Com base nos resultados obtidos nas seções 7.3, 7.4 e 7.5 concluímos que, em relação ao grupo 1, as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), retorno e semivariância ($\alpha = 3$ e $\beta = 1$) e retorno e variância ($\alpha = 3$ e $\beta = 1$), nessa ordem, apresentaram o maior retorno para o período de 2007. Ainda em relação a essas preferências, o modelo com base no retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) apresentou a maior assimetria bem como a menor semivariância.

Em relação ao grupo 2, as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), retorno e semivariância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) e retorno e variância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), nessa ordem, apresentaram o maior retorno para o período de 2007. Semelhante ao grupo 1, o modelo com base no retorno e na assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) apresentou a maior assimetria bem como a menor semivariância.

Em 2007 o retorno de mercado, representado pelo IBOVESPA, foi de 44% enquanto que o ativo livre de risco, representado pelo Certificado de Depósito Bancário – CDI correspondeu a 12%. Ou seja, as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), retorno e semivariância ($\alpha = 3$ e $\beta = 1$) e retorno e variância ($\alpha = 3$ e $\beta = 1$), para o grupo 1, conseguiram superar tanto o retorno de mercado bem como o ativo livre de risco.

Embora as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), retorno e semivariância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) e retorno e variância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), para o Grupo 2, tenham apresentado o maior retorno para o período de 2007, nessa ordem, seus retornos só foram superiores ao retorno do ativo livre de risco.

Uma primeira delimitação importante desta pesquisa refere-se à amostra analisada. Para a pesquisa foram definidos dois grupos específicos de dez ações. Como no período de análise as dispersões não foram elevadas (Anexos C e D), isto acabou favorecendo os resultados obtidos pelo modelo com base na preferência retorno e assimetria. O período de análise é também uma delimitação, uma vez que no ano de 2007 os resultados obtidos pelo mercado de ações foram positivos.

Próximos estudos podem ser estendidos para outras medidas de risco, a exemplo da incorporação da curtose num modelo de programação por metas. Por fim, como tarefa desafiadora para pesquisas futuras, a definição das preferências por retorno esperado e assimetria, evitando as combinações para α e β sem qualquer suporte teórico.

Referências

ANDRADE, F. Alocação de Ativos no mercado acionário brasileiro segundo o conceito de donwside risk. Revista de Gestão USP, v.13, p.27-36, 2006.

ARDITTI, F.; LEVY, H. Portfolio efficiency analysis in three moments: The multiperiod case. *The Journal of Finance*, v. 30, p.797-809, 1975.

ATHAYDE, G.; FLÔRES, R. Finding a maximum skewness portfolio – a general solution to three-moments portfolio choice. *Journal of Economic Dynamics & Control*, v.28, p.1335-1352, 2004.

BALLESTERO, E. Approximating the optimum portfolio for an investor with particular preferences. *Journal of the Operational Research Society*, v.49, p.998–1000, 1998.

________________. Mean-semivariance efficient frontier: A downside risk model for portfolio selection. *Applied Mathematical Finance*, v.12, n.1, p.1-15, 2005.

BALLESTERO, E.; PLÀ-SANTAMARÍA, D. Portfolio selection on the Madrid Exchange: a compromise programming model. *International Transactions in Operational Research*, v.10, p.33-51, 2003.

BAWA, V.; BODURTHA, J.; RAO, M.; SURI, H. On determination of stochastic dominance optimal sets. *The Journal of Finance*, v. 40, p.417-431, 1985.

BEACH,S. Semivariance in asset allocations: longer horizons can handle riskier holdings. *FPA Journal*, p.1-14, 2007.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. *Fundamentos de Investimentos*. Tradução Robert Brian Taylor. 3 ed. Porto Alegre, Bookman, 2002. 624p.

BOND, A.; SATCHELL, E. Statistical properties of the sample semi-variance. *Applied Mathematical Finance*, v.9, p.219-239, 2002.

BREALEY, R.; MYERS, S.; Princípios de Finanças Empresariais. Tradução Maria do Carmo Figueira. Lisboa, McGraw-Hill, 1998. 997p.

BRIGHAM, E.; GAPENSKI, L.; EHRHARDT, M. Administração financeira: Teoria e prática. Tradução Alexandre Loureiro Guimarães Alcântara, José Nicolas Albuja Salazar. São Paulo, Atlas, 2001. 1009p.

CANELA, M.; COLLAZO, E. Portfolio selection with skewness in emerging market industries. *Emerging Markets Review*, v.8, p.230–250, 2007.

CAVALCANTI, F.; MISUMI, J. Mercado de Capitais. 5 ed. Rio de Janeiro, Campus, 2003. 330p.

CHOPRA, V.; ZIEMBA, W. The effect of errors in means, variances and covariances on optimal portfolio choice. *The Journal of Portfolio Management*. p.6-11, 1993

CHUNHACHINDA, P.; DANDAPANI, K.; HAMID, S.; PRAKASH, A.; Portfolio selection and skewness: Evidence from international stock markets. *Journal of Banking and Finance*, v. 21, p. 143–167, 1997.

COTIAS, A. O fim dos flippers? Jornal Valor Econômico, São Paulo, 15 out. 2007. Caderno Eu&Investimentos. p.1.

DACHRAOUI, K.; DIONNE, G. Stochastic dominance and optimal portfolio. *Economics Letters*, v.71, p.347–354, 2001.

DUTTA, J.; KAPURB, S.; ORSZAGB, M. A portfolio approach to the optimal funding of pensions. *Economics Letters*. v.69, p.201–206, 2000.

ELTON, E.; GRUBER, M.; BROWN, S.; GOETZMANN, W. Moderna teoria de carteiras e análise de investimentos. Tradução Antonio Zoratto Sanvicente. São Paulo, Atlas, 2004. 597p.

ESTRADA, J. Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM. *Emerging Markets Review*, v.3, p.365–379, 2002.

_______. Mean-semivariance optimization: a heuristic approach. Journal of Applied Finance, 2008.

FRIEDLANDER, A. Elementos de programação não-linear, Editora da Unicamp, 1994.116p.

GALVÃO, A.; OLIVEIRA, V.; RIBEIRO, E. Mercado financeiro: uma abordagem prática dos principais produtos e serviços, Campus, 2006. 485p.

HARVEY, C. The word price of covariance risk. *The Journal of Finance*, v.30, p.111-157, 1991.

HARVEY, C.; LIECHTY, J.; LIECHTY, M.; MULLER, P. Portfolio selection with higher moments. *Working paper*. Drexel University, 2003.

HARVEY, C.; SIDDIQUE, A. Conditional skewness in asset pricing tests. *The Journal of Finance*, v.55, p.1263–1295, 2000.

HOGAN, W., WARREN, J. Toward the development of an equilibrium capital-market model based on semivariance. *The Journal of Finance*, v.9, p.1-11, 1974.

HU, C.; TENG, C.; LI, S. A fuzzy goal programming approach to multi-objective optimization problem with priorities. *European Journal of Operational Research*, v.176, p.1319–1333, 2007.

JOSA-FOMBELLIDA, R.; RINCÓN-ZAPATERO, J. Minimization of risks in pension funding by means of contributions and portfolio selection. *Insurance Mathematics and Economics*, v.29, p.35–45, 2001.

KONNO, H.; YAMAZAKI, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management Science*, v. 37, p.519-531, 1991.

KONNO, H.; WIJAYANAYAKE, A. Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints. *Mathematical Programming*, v. 89, p. 233–250. 2001.

KUMAR, P.; PHILIPPATOS, G.; EZZELL, J. Goal programming and the selection of portfolios by dual-purpose funds. *The Journal of Finance*, v. 33, p.303-310, 1978.

LAI, T. Portfolio Selection with skewness: A multiple-objective approach. *Review of Quantitative Finance and Accounting v.*1, p. 293–305, 1991.

LEE, S.; LERRO, A. Optimizing the portfolio selection for mutual funds. *The Journal of Finance*, v.28, p.1087-1101, 1973.

LOEWENSTEIN, M. On optimal portfolio trading strategies for an investor facing transactions costs in a continuous trading market. *Journal of Mathematical Economics*, v. 33, p.209–228, 2000.

MANSINI, E.; SPERANZA, G. Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots. *European Journal Operational Research*, v. 114, p. 219–233, 1999.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, p. 77-91, 1952.

_______. Foundations of portfolio theory. *Journal of Finance*, v. 46, n.2, p. 469-477, 1991.

MARTÍNEZ, J.; SOARES, S. Métodos computacionais de otimização. São Paulo, UNICAMP, 1995, 239p.

MARTINS, G. Manual para elaboração de monografias e dissertações. 2 ed. São Paulo, Atlas, 1994.116p.

NAWROCKI, D. Brief of history of downside risk measures. *The Journal of Investing*, p. 9-26, 1999.

PAVINI, A. Fundamento da Bolsa. Jornal Valor Econômico, São Paulo, 28 mai. 2007. Caderno Eu&Investimentos. p.2.

PERSSON, M. Estimation risk and portfolio selection in the lower partial moment. *Working paper*. Department of economics Lund University. 2000.

PESTANA, D.; VELOSA, S. Introdução à probabilidade e à estatística. 2 ed. Portugal, Fundação Calouste Gulbenkian, 2006, 1159p.

PINHEIRO, J. Mercado de Capitais: Fundamentos e técnicas. 4 ed. São Paulo, Atlas, 2007. 351p.

PRAKASH, J.; CHANG, C.; PACTWA, T. Selecting a portfolio with skewness: recent evidence from US, European, and Latin American equity markets. *Journal of Banking and Finance*, v. 27, p. 1375–1390, 2003.

RAO, S. Engineering optimization: theory and practice. 3 Edition. New York, Jonh Wiley & Sons. 1999, 895p.

RICHARDSON, R. J. Pesquisa social: métodos e técnicas. 3.ed. São Paulo: Atlas, 1999, 336p.

ROY, A. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*. v.20, p.431-449, 1952.

SMEERS, Y. Generalized reduced gradient method as an extension of feasible direction methods. *Journal of optimization theory and applications*, v.22, p.209-226, 1977.

SORTINO, F.; PRICE, L. Performance measurement in a downside risk framework. *Journal of Investing*, v.3, p.59-64, 1994.

SUN, Q.; YAN, Y. Skewness persistence with optimal portfolio selection. *Journal of Banking and Finance*, v. 27, p.1111–1121, 2003.

TREYNOR, J. The invisible costs of trading. *Journal of Portfolio Management*, p.71-78, 1994.

YITZHAKI, S. Stochastic dominance, mean variance, and Gini's mean difference. *The American Economic Review*, v. 72, p. 178-185, 1982.

YOUNG, R. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. Management Science, v. 44, p. 673–683, 1998.

ZITZLER, E.; DEB, K.; THIELE, L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results. *Working papers*. Massachusetts Institute of Technology. 2000.

Anexo A – apresentação do modelo gradiente reduzido generalizado

O método do gradiente reduzido foi inicialmente proposto por Wolfe (1963, apud Martínez e Santos, 1995, p.195) para problemas de otimização com restrições lineares. Em seguida, Abadie e Carpentier (1969, apud Smeers, 1977, p.210) estenderam o método para problemas de otimização não linear, originando o método do gradiente reduzido generalizado.

Martínez e Santos (1995, p.195) explicam que o método do gradiente reduzido generalizado busca reduzir o valor da função objetivo. A idéia básica é a de que um conjunto de restrições de igualdades não lineares representa um conjunto de equações de forma que seja possível representar uma variável em relação à outra. Com isso, otimizar um conjunto de restrições passa a ser um problema irrestrito, cujas variáveis são, justamente, as variáveis selecionadas como variáveis independentes.

O método do gradiente reduzido generalizado com restrições é considerado conforme:

$$Mimimizar\ f(X) \tag{A.1}$$

sujeito a

$$h_j(X) \le 0,\ \ j = 1, 2, ..., m \tag{A.2}$$

$$l_k(X) = 0,\ \ k = 1, 2, ..., l \tag{A.3}$$

$$x_i^{(l)} \le x_i \le x_i^{(u)},\ \ i = 1, 2, ..., n \tag{A.4}$$

Agora, Rao (1996, p.466) explica que se deve transformar o problema apenas em restrições de igualdade, através da introdução de uma variável de folga para cada restrição de desigualdade, dada conforme:

$$h_j(X) + x_{n+j} = 0,\ \ j = 1, 2, ..., m \tag{A.5}$$

$$h_k(X) = 0,\ \ k = 1, 2, ..., l \tag{A.6}$$

$$x_i^{(l)} \le x_i \le x_i^{(u)},\ \ i = 1, 2, ..., n \tag{A.7}$$

$$x_{n+j} \ge 0,\ \ j = 1, 2, ..., m \tag{A.8}$$

A equação (A.1) requer a adição de m variáveis de folga não negativas. Isto acaba originando um aumento do número de variáveis. O vetor X passa a representar as variáveis originais além das n variáveis de folga. Desta forma, o vetor X é representado por:

$$X = \begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix} \tag{A.9}$$

considerando Y o vetor das variáveis independentes e Z o vetor das variáveis dependentes.

Desta forma, o problema pode ser reescrito conforme:

$$Mimimizar\ f(X) \tag{A.10}$$

sujeito a

$$g_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, ..., m + l \tag{A.11}$$

$$x_i^{(l)} \leq x_i \leq x_i^{(u)}, \quad i = 1, 2, ..., n + m \tag{A.12}$$

Em seguida, define-se o cálculo das derivadas da função objetivo e da função restrição. Então, para cada uma delas tem-se:

$$df(X) = \sum_{i=1}^{n-l} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{m+l} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \tag{A.13}$$

$$dg_i(X) = \sum_{j=1}^{n-l} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} dy_j + \sum_{j=1}^{m+l} \frac{\partial g_i}{\partial z_j} dz_j \tag{A.14}$$

Alternativamente temos:

$$df(X) = \nabla_Y^T f dY + \nabla_Z^T f dZ \tag{A.15}$$

$$dg(X) = [C] dY + [D] dZ \tag{A.16}$$

considerando:

$$\nabla_Y f = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_{n-l}} \end{Bmatrix} \tag{A.17}$$

$$\nabla_Z f = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_{m+l}} \end{Bmatrix} \tag{A.18}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_{n-l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_{m+l}}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_{m+l}}{\partial y_{n-1}} \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial z_{m+l}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_{m+l}}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_{m+l}}{\partial y_{m+l}} \end{bmatrix} \tag{A.20}$$

$$dY = \begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_{n-l} \end{Bmatrix} \tag{A.21}$$

$$dZ = \begin{Bmatrix} dz_1 \\ dz_2 \\ \vdots \\ dz_{m+l} \end{Bmatrix} \tag{A.22}$$

Assumindo que a restrição é satisfeita no vetor $X, (g(X) = 0)$, qualquer alteração no vetor dX deve corresponder a $dg = 0$ para manter a viabilidade de $X + dX$. A equação (A.16) pode ser resolvida pela expressão dZ, conforme:

$$dZ = -[D]^{-1}[C]dY \tag{A.23}$$

A alteração na função objetivo devido a mudança em X dada pela equação (A.15), pode ser expressa pela utilização da equação (A.23), conforme:

$$df(X) = (\nabla_Y^T f - \nabla_Z^T f\,[D]^{-1}[C])dY \tag{A.24}$$

Alternativamente:

$$\frac{df}{dY}(X) = G_R \tag{A.25}$$

onde:

$$G_R = \nabla_Y f - ([D]^{-1}[C])^T \nabla_Z f \tag{A.26}$$

é definido como o gradiente reduzido generalizado. Geometricamente, conforme Rao (1999, p.469), o gradiente reduzido generalizado é descrito como uma projeção n-dimensional para $(n-m)$-dimensional da região viável, descrita pelas variáveis. Uma condição necessária para a existência de um ponto mínimo dá-se quando o gradiente reduzido assume o valor zero.

Nota-se que a resolução da equação (A.23) é baseada numa aproximação linear para um problema original não linear. Então, as restrições podem não ser exatamente iguais a zero.

Daí, quando Y for mantido fixo, tem-se:

$$g_i(X) + dg_i(X) = 0, \ \ i = 1, 2, ..., m + l \tag{A.27}$$

então:

$$g(X) + dg(X) = 0 \tag{A.28}$$

Usando a equação (A.25) em (A.28) obtém-se:

$$dZ = [D]^{-1}(-g(X) - [C]dY) \tag{A.29}$$

As restrições são avaliadas, conforme alterações no vetor X, de forma que o procedimento é repetido até que dZ seja suficientemente pequeno. A equação (A.29) pode utilizar o método de Newton para resolver as equações simultâneas e obter um valor suficientemente pequeno, conforme Rao (1999, p.470).

O gradiente reduzido generalizado pode ser resumido através do seguinte algoritmo, conforme Rao (1999, p.470), para um único ponto de mínimo:

1. **Definir as variáveis dependentes e independentes do problema de programação**. O estado das variáveis é definido para evitar uma matriz singular. As variáveis são ajustadas no processo iterativo para manter a viabilidade de qualquer componente X;
2. **Calcular o gradiente reduzido generalizado**. O gradiente reduzido generalizado é determinado através da equação (A.26). As derivadas das funções na equação (A.26) podem ser definidas, se necessário;
3. **Testar a convergência**. Se todos os componentes do gradiente reduzido generalizado são próximos de zero o método convergiu e os valores do vetor X podem ser considerados como a melhor solução para o problema. Agora, se o método não convergiu, deve-se determinar uma direção de busca, conforme etapa 4;

4. **Determinar uma direção de busca**. O gradiente reduzido generalizado pode ser usado semelhante ao gradiente de uma função objetivo. As técnicas usadas para esta finalidade podem ser, conforme Rao (1999, p.470) o método de descida, o método de Fletcher-Reeves, o método de Davidon-Fletcher-Powell além do método Broyden-Fletcher-Goldford-Shanno.
5. **Encontrar o mínimo ao longo da busca de direção**. Caso a função objetivo ou suas restrições sejam multimodais, o algoritmo pode ser resumido conforme acima, no entanto, após a definição do ponto mínimo, na etapa 5, irá definir outros valores para o espaço das decisões. Isto pode ser feito algumas vezes, conforme a necessidade do problema.

Anexo B – implementação computacional através do software de otimização Lingo

A construção do modelo proposto para seleção de portfólios está baseada nos elementos que constituem as funções objetivo bem como as restrições e as preferências, por retorno, variância, assimetria e semivariância, definidas pelo investidor. Para o modelo de seleção, a determinação da porcentagem relativa das ações é o principal interesse da seleção de portfólio.

As funções objetivo, pertencentes aos conjuntos de funções objetivo retorno esperado e inverso da variância; retorno esperado e assimetria; retorno esperado e inverso da semivariância são maximizadas individualmente. Então, o problema é definido como multiobjetivo e sua resolução acontece em duas etapas. Por tratar-se de um problema com restrições não lineares sua resolução é associada ao método do gradiente reduzido generalizado para determinação das direções de busca do modelo de otimização.

A modelagem desta pesquisa foi realizada através do pacote computacional super LINGO – *Linear, Interactive and General Optimizer*, versão 11, licença acadêmica. O programa comporta o processamento de problemas contento 1.000 restrições, 2.000 variáveis, 200 variáveis inteiras e 200 variáveis não lineares além de 10 variáveis globais, conforme Figura Anexo B.1.

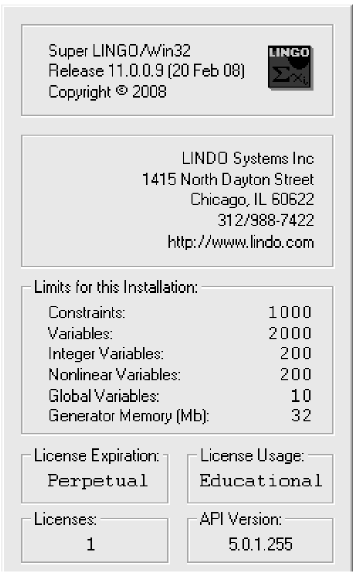

Figura Anexo B 1 Rótulo de Informações sobre o Super LINGO. Informações sobre o número de restrições, variáveis, variáveis inteiras, variáveis não lineares e globais.
Fonte: Elaboração própria, 2009.

Como o número de variáveis definidas para a pesquisa e de suas restrições são inferiores aos valores apresentados, não foi necessária alteração alguma para compatibilizar o modelo com a capacidade computacional.

As variáveis dependentes, representadas pelas participações percentuais das ações nos portfólios que podem ser formados, são definidas a partir do retorno médio de cada ação, da tendência como as ações se movem conjuntamente para cima e para baixo e das interações curvilíneas. Com base no retorno histórico das ações é possível definir esses valores. Através do número de ações analisadas, para composição do portfólio, é definido o vetor do retorno esperado além das matrizes de variância, do terceiro momento e da semivariância.

Como o pacote computacional Super LINGO é uma ferramenta de otimização, as matrizes da variância, terceiro momento e semivariância foram definidas na planilha eletrônica Excel, versão 2007, através das funções COVAR e SOMARPRODUTO.

Para representar a implementação do modelo proposto, bem como dos modelos propostos por Markowitz (1952) e Lai (1991), também baseados num modelo de programação por metas, foram utilizadas informações dos retornos históricos das ações do grupo 1, no período de janeiro de 2002 a dezembro de 2006, disponíveis no arquivo janeiro.xls. Então, com base nas matrizes disponíveis neste arquivo foi possível definir a seleção para o mês de janeiro de 2007.

Implementação com base no retorno esperado e variância

A modelagem para seleção de portfólios levando em consideração a preferência do investidor por retorno e variância é definida em duas etapas, conforme seção 3.5.2, do Capítulo 3, desta dissertação. Na primeira etapa $(MP1)$, serão maximizadas, isoladamente, as funções objetivo retorno esperado e inverso da variância, conforme equações (3.17) e (3.18), sujeita à restrição definida na equação (3.19) e $x_i \leq 0,30 \;\; para \; i = 1,...,n$.

Ao implementar o problema de programação do tipo não linear, no Super LINGO, temos a definição das equações que representam a função objetivo retorno esperado e da função inverso da variância, sujeitas as restrições, conforme:

```
MODEL:

SETS:
! Portfolio;
  THRMOMENT/1..100/;
  ACAO: X, Re;
  VAR(ACAO, ACAO) : V;
ENDSETS


DATA:

ALPHA = 3;
GAMA  = 1;

ACAO, V, Re =
   @OLE( 'c:\grupo1\janeiro.xls','ACAO', 'V', 'Re');

ENDDATA

SUBMODEL MAXIMIZAR_RETORNO:
  ! Maximize o retorno;
[OBJ_MAX_RETORNO] MAX = @SUM(ACAO(I): X(I) * Re(I));

  ! Restringindo o investimento em 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
  @FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL

SUBMODEL MAXIMIZAR_VARIANCIA:
! Minimizando a variancia;
 [OBJ_MAX_VARIANCIA] MAX = 1 / @SUM( VAR( I, J): V( I, J) * X( I) * X( J));

  ! Restringindo o investimento em 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
  @FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL
```

Para a segunda etapa $(MP2)$, após a maximização das funções objetivo retorno esperado e inverso da variância, sujeitas as restrições definidas pelo modelo, as preferências do investidor por retorno esperado e variância, são incorporadas por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Uma vez que os objetivos são conflitantes, a programação por metas, conforme seção 6.2.1, do Capítulo 6 desta dissertação, é utilizada. Então, a implementação através do super LINGO é finalizada, conforme:

```
SUBMODEL CALCULAR_PREFERENCIA:

[OBJ_MIN_PREFERENCIA] MIN = (1 + D1)^ALPHA + (1 + D2)^GAMA;
```

```
! Sendo o retorno o mais proximo de Z1;
D1 = ((Z1 - @SUM(ACAO(I): X(I) * Re(I))) / Z1);

! Sendo a variancia a mais proxima de Z2;
D2 = ((Z2 - (1 / @SUM( VAR( I, J): V( I, J) * X( I) * X( J)))) / Z2);

  ! Restringindo o investimento em 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
  @FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL

CALC:

@SET('TERSEO', 1);

  ! Maximiza o retorno;
@SOLVE(MAXIMIZAR_RETORNO)
  ! Salva o retorno ;
Z1 = OBJ_MAX_RETORNO;
@WRITE('Z1 = ', Z1, @NEWLINE( 1));

  ! Minimiza a variancia;
@SOLVE(MAXIMIZAR_VARIANCIA)
  ! Salva a variância;
Z2 = OBJ_MAX_VARIANCIA;
@WRITE('Z2 = ', Z2, @NEWLINE( 1));

@SET('TERSEO', 0);

  ! Calcula preferência;
@SOLVE(CALCULAR_PREFERENCIA)
  ! Salva a assimetria ;
RESULTADO = OBJ_MIN_PREFERENCIA;
@WRITE('Resultado = ', RESULTADO , @NEWLINE( 1));


ENDCALC
```

Após a convergência do modelo é gerado um relatório com os resultados da operação. No relatório estão disponíveis o valor da função objetivo, o número de interações realizadas além dos valores das variáveis do modelo. Em relação ao exemplo utilizado temos:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.4102167E-01
  Infeasibilities:                               0.000000
  Total solver iterations:                              4

Z1 = 0.04102166666666666
  Local optimal solution found.
  Objective value:                               223.7497
  Infeasibilities:                               0.000000
  Total solver iterations:                             19

Z2 = 223.7497193752632
  Local optimal solution found.
  Objective value:                               2.315387
  Infeasibilities:                              0.2775558E-16
  Total solver iterations:                             22
```

Variable	Value	Reduced Cost
ALPHA	3.000000	0.000000
GAMA	1.000000	0.000000
D1	0.1913358E-02	0.000000
D2	0.3096358	0.000000
Z1	0.4102167E-01	0.000000
Z2	223.7497	0.000000
RESULTADO	0.000000	0.000000
X(PETR4)	0.000000	0.1571426
X(VALE5)	0.3000000	0.000000
X(TNLP4)	0.000000	0.2281529
X(BBDC4)	0.3000000	0.000000
X(USIM5)	0.000000	1.643036
X(ITAU4)	0.2464847	-0.1842474E-06
X(CSNA4)	0.000000	2.869680
X(GGBR4)	0.000000	1.051797
X(ELET6)	0.000000	1.741388
X(CPLE6)	0.1535153	0.000000

Então, na primeira etapa $(MP1)$, as funções objetivo retorno esperado e inverso da variância, de maneira isolada, são maximizadas, respectivamente, em 0,0410 (4,1%) e 223,7497 (O valor da variância corresponde a 0,44693%, uma vez que utilizamos a função inverso da variância), sujeitas às restrições definidas no modelo. Esses números representam os valores para Z_1^* e Z_2^* e, identificam um conjunto de soluções independentes, não dominadas das preferências do investidor em relação ao retorno esperado e a variância.

Na segunda etapa $(MP2)$, conforme as preferências do investidor por retorno esperado e variância, são minimizados os desvios obtidos entre os valores obtidos na primeira etapa com os valores obtidos na segunda etapa. No relatório temos que o desvio para a função retorno esperado é de 0,19% enquanto que o desvio para função inverso da variância é de 30,96%. Isto acontece porque o investidor dá uma maior preferência ao retorno esperado.

Com base nessa preferência, o investidor deve alocar 30% dos seus recursos nas ações VALE5, 30% nas ações BBDC4, 24,64% nas ações ITAU4 e 15,36% nas ações CPLE6, no mês de janeiro de 2007.

Implementação com base no retorno esperado e assimetria

A modelagem para seleção de portfólios levando em consideração a preferência do investidor por retorno e assimetria (terceiro momento) é definida em duas etapas, conforme seção 4.2.3, do Capítulo 4, desta dissertação. Na primeira etapa $(MP1)$, serão maximizadas, isoladamente, as funções objetivo retorno esperado e terceiro momento, conforme equações (4.18) e (4.19), sujeitas à restrição definida na equação (4.20) e $x_i \leq 0,30 \;\; para \; i = 1,...,n$.

Ao implementar o problema de programação do tipo não linear, no Super LINGO, temos a definição das equações que representam a função objetivo retorno esperado e assimetria, sujeitas as restrições, conforme:

```
MODEL:

SETS:
! Portfolio;
  THRMOMENT/1..100/;
  ACAO: X, Re;
  TERMOMENTO(ACAO, THRMOMENT) : M;
ENDSETS


DATA:

ALPHA = 3;
BETA  = 1;

 ACAO, M, Re =
   @OLE( 'c:\grupo1\janeiro.xls','ACAO', 'M', 'Re');

ENDDATA

SUBMODEL MAXIMIZAR_RETORNO:
  ! Maximize o retorno;
[OBJ_MAX_RETORNO] MAX = @SUM(ACAO(I): X(I) * Re(I));

  ! Restringindo o investimento em 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
  @FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL

SUBMODEL MAXIMIZAR_ASSIMETRIA:
! Maximizando a assimetria;
 [OBJ_MAX_ASSIMETRIA] MAX = @SUM( TERMOMENTO( I, J): M( I, J) * X( I) * X(
@FLOOR(1 + (J - 1)/10) ) * X( @WRAP(J, 10)));

! Restringindo o investimento em 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
  @FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL
```

Para a segunda etapa $(MP2)$, após a maximização das funções objetivo retorno esperado e assimetria, sujeitas as restrições definidas pelo modelo, as preferências do investidor por retorno esperado e assimetria são incorporadas por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Uma vez que os objetivos são conflitantes, a programação por metas, conforme seção 6.2.1, do Capítulo 6 desta dissertação, é utilizada. Então, a implementação através do super LINGO é finalizada, conforme:

```
SUBMODEL CALCULAR_PREFERENCIA:

[OBJ_MIN_PREFERENCIA] MIN = (1 + D1)^ALPHA + (1 + D3)^BETA;

! Sendo o retorno o mais proximo de Z1;
D1 = ((Z1 - @SUM(ACAO(I): X(I) * Re(I))) / Z1);

! Sendo a assimetria a mais proxima de Z3;
D3 = ((Z3 - @SUM( TERMOMENTO( I, J):  M( I, J) * X( I) * X( @FLOOR(1 + (J -
1)/10) ) * X( @WRAP(J, 10)))) / Z3);
! Restringindo o investimento em 100%;
@SUM( ACAO: X) = 1;
@FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL

CALC:

@SET('TERSEO', 1);

  ! Maximiza o retorno ;
@SOLVE(MAXIMIZAR_RETORNO)
  ! Salva o retorno ;
Z1 = OBJ_MAX_RETORNO;
@WRITE('Z1 = ', Z1, @NEWLINE( 1));

  ! Maximiza a assimetria ;
@SOLVE(MAXIMIZAR_ASSIMETRIA)
  ! Salva a assimetria ;
Z3 = OBJ_MAX_ASSIMETRIA;
@WRITE('Z3 = ', Z3, @NEWLINE( 1));

@SET('TERSEO', 0);

  ! Calcula preferência ;
@SOLVE(CALCULAR_PREFERENCIA)
  ! Salva a assimetria ;
RESULTADO = OBJ_MIN_PREFERENCIA;
@WRITE('Resultado = ', RESULTADO , @NEWLINE( 1));


ENDCALC
```

Após a convergência do modelo é gerado um relatório com os resultados da operação. No relatório estão disponíveis o valor da função objetivo, o número de interações realizadas além dos valores das variáveis do modelo. Em relação ao exemplo utilizado temos:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.4102167E-01
  Infeasibilities:                               0.000000
  Total solver iterations:                              4

Z1 = 0.04102166666666666
  Local optimal solution found.
  Objective value:                              0.1921293E-03
  Infeasibilities:                              0.1110223E-15
  Total solver iterations:                              9

Z3 = 0.000192129340504985
  Local optimal solution found.
  Objective value:                               2.361878
  Infeasibilities:                              0.2220446E-15
  Total solver iterations:                             16
```

Variable	Value	Reduced Cost
ALPHA	3.000000	0.000000
BETA	1.000000	0.000000
D1	0.1300126E-01	0.000000
D3	0.3223651	0.000000
Z1	0.4102167E-01	0.000000
Z3	0.1921293E-03	0.000000
RESULTADO	0.000000	0.000000
X(PETR4)	0.1000000	0.000000
X(VALE5)	0.3000000	0.000000
X(TNLP4)	0.000000	3.513911
X(BBDC4)	0.3000000	0.000000
X(USIM5)	0.000000	2.670736
X(ITAU4)	0.3000000	0.000000
X(CSNA4)	0.000000	3.125819
X(GGBR4)	0.000000	0.3847217
X(ELET6)	0.000000	5.114264
X(CPLE6)	0.000000	1.819571

Então, na primeira etapa $(MP1)$, as funções objetivo retorno esperado e assimetria, de maneira isolada, são maximizadas, respectivamente, em 0,0410 (4,1%) e 0,00019 (0,019%), sujeitas às restrições definidas no modelo. Esses números representam os valores para Z_1^* e Z_3^* e, identificam um conjunto de soluções independentes, não dominadas das preferências do investidor em relação ao retorno esperado e a assimetria.

Na segunda etapa $(MP2)$, conforme as preferências do investidor por retorno esperado e assimetria, são minimizados os desvios obtidos entre os valores obtidos na primeira etapa com os valores obtidos na segunda etapa. No relatório temos que o desvio para a função retorno esperado é de 1,30% enquanto que o desvio para função assimetria é de 32,23%. Isto acontece porque o investidor dá uma maior preferência ao retorno esperado.

Com base nessa preferência, o investidor deve alocar 10% dos seus recursos nas ações PETR4, 30% nas ações VALE5, 30% nas ações BBDC4 e 30% nas ações ITAU4, no mês de janeiro de 2007.

Implementação com base no retorno esperado e semivariância

A modelagem para seleção de portfólios levando em consideração a preferência do investidor por retorno e semivariância é definida em duas etapas, conforme seção 5.6, do Capítulo 5, desta dissertação. Na primeira etapa $(MP1)$, serão maximizadas, isoladamente, as funções objetivo retorno esperado e inverso da semivariância, conforme equações (5.9) e (5.10), sujeita à restrição definida na equação (5.11) e $x_i \leq 0{,}30 \;\; para\; i = 1,...,n$.

Ao implementar o problema de programação do tipo não linear, no Super LINGO, temos a definição das equações que representam a função objetivo retorno esperado e da função inverso da semivariância, sujeitas as restrições, conforme:

```
MODEL:

SETS:
! Portfolio;
  THRMOMENT/1..100/;
  ACAO: X, Re;
  SVAR(ACAO, ACAO) : SV;
ENDSETS


DATA:

ALPHA = 3;
GAMA  = 1;

ACAO, SV, Re =
   @OLE( 'c:\grupo1\janeiro.xls','ACAO', 'SV', 'Re');

ENDDATA

SUBMODEL MAXIMIZAR_RETORNO:
  ! Maximize o retorno;
[OBJ_MAX_RETORNO] MAX = @SUM(ACAO(I): X(I) * Re(I));

  ! Restringindo o investimento em 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
  @FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
```

```
ENDSUBMODEL

SUBMODEL MAXIMIZAR_SEMI_VARIANCIA:
! Maximizando a semi-variancia;
 [OBJ_MAX_SEMI_VARIANCIA] MAX = (1 / (@SUM( SVAR( I, J): SV( I, J) * X( I)
* X( J))));

! Restringindo a 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
  @FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL
```

Para a segunda etapa $(MP2)$, após a maximização das funções objetivo retorno esperado e inverso da semivariância, sujeitas as restrições definidas pelo modelo, as preferências do investidor por retorno esperado e semivariância, são por $\alpha = 3$ e $\beta = 1$. Uma vez que os objetivos são conflitantes, a programação por metas, conforme seção 6.2.1, do Capítulo 6 desta dissertação, é utilizada. Então, a implementação através do super LINGO é finalizada, conforme:

```
SUBMODEL CALCULAR_PREFERENCIA:

[OBJ_MIN_PREFERENCIA] MIN = (1 + D1)^ALPHA + (1 + D2)^GAMA;

! Sendo o retorno o mais proximo de Z1;
D1 = ((Z1 - @SUM(ACAO(I): X(I) * Re(I))) / Z1);

! Sendo a semi-variancia a mais proxima de Z2;
D2 = ((Z2 - (1 / (@SUM( SVAR( I, J): SV( I, J) * X( I) * X( J))))) / Z2);

! Restringindo o investimento em 100%;
  @SUM( ACAO: X) = 1;
@FOR ( ACAO( I): X( I) <= 0.3);
ENDSUBMODEL

CALC:

@SET('TERSEO', 1);

  ! Maximiza o retorno ;
@SOLVE(MAXIMIZAR_RETORNO)
  ! Salva o retorno ;
Z1 = OBJ_MAX_RETORNO;
@WRITE('Z1 = ', Z1, @NEWLINE( 1));

  ! Maximiza a semi-variancia ;
@SOLVE(MAXIMIZAR_SEMI_VARIANCIA)
  ! Salva a semi-variância;
Z2 = OBJ_MAX_SEMI_VARIANCIA;
@WRITE('Z2 = ', Z2, @NEWLINE( 1));

@SET('TERSEO', 0);
  ! Calcula preferência ;
@SOLVE(CALCULAR_PREFERENCIA)
  ! Salva a assimetria ;
RESULTADO = OBJ_MIN_PREFERENCIA;
@WRITE('Resultado = ', RESULTADO , @NEWLINE( 1));
```

```
ENDCALC
```

Após a convergência do modelo é gerado um relatório com os resultados da operação. No relatório estão disponíveis o valor da função objetivo, o número de interações realizadas além dos valores das variáveis do modelo. Em relação ao exemplo utilizado temos:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              0.4102167E-01
  Infeasibilities:                               0.000000
  Total solver iterations:                              4
Z1 = 0.04102166666666666
  Local optimal solution found.
  Objective value:                               418.4850
  Infeasibilities:                               0.000000
  Total solver iterations:                             13

Z2 = 418.4849745892757
  Local optimal solution found.
  Objective value:                               2.175421
  Infeasibilities:                              0.2220446E-15
  Total solver iterations:                             18


                       Variable           Value        Reduced Cost
                          ALPHA        3.000000            0.000000
                           GAMA        1.000000            0.000000
                             D1       0.1300126E-01        0.000000
                             D2       0.1359080            0.000000
                             Z1       0.4102167E-01        0.000000
                             Z2        418.4850            0.000000
                      RESULTADO        0.000000            0.000000
                      X( PETR4)       0.1000000            0.000000
                      X( VALE5)       0.3000000            0.000000
                      X( TNLP4)        0.000000           0.6725830
                      X( BBDC4)       0.3000000            0.000000
                      X( USIM5)        0.000000            1.831241
                      X( ITAU4)       0.3000000            0.000000
                      X( CSNA4)        0.000000            2.886488
                      X( GGBR4)        0.000000           0.8004693
                      X( ELET6)        0.000000            2.225864
                      X( CPLE6)        0.000000           0.2915852
```

Então, na primeira etapa $(MP1)$, as funções objetivo retorno esperado e inverso da semivariância, de maneira isolada, são maximizadas, respectivamente, em 0,0410 (4,1%) e 418,4850 (0,23896%), sujeitas às restrições definidas no modelo. Esses números representam os valores para Z_1^* e Z_2^* e, identificam um conjunto de soluções independentes, não dominadas das preferências do investidor em relação ao retorno esperado e a semivariância.

Na segunda etapa $(MP2)$, conforme as preferências do investidor por retorno esperado e semivariância, são minimizados os desvios obtidos entre os valores obtidos na primeira etapa com os valores obtidos na segunda etapa. No relatório temos que o desvio para a função retorno esperado é de 1,30% enquanto que o desvio para função inverso da semivariância é de 13,59%. Isto acontece porque o investidor dá uma maior preferência ao retorno esperado.

Com base nessa preferência, o investidor deve alocar 10% dos seus recursos nas ações PETR4, 30% nas ações VALE5, 30% nas ações BBDC4 e 30% nas ações ITAU4, no mês de janeiro de 2007.

Anexo C – retorno médio, variância, terceiro momento e semivariância do grupo 1

	PETR4	VALE5	TNLP4	BBDC4	USIM5	ITAU4	CSNA3	GGBR4	ELET6	CPLE6	IBOV
Jan02 a Dez06											
Retorno Médio	2,97%	3,99%	2,42%	4,86%	1,30%	3,65%	-0,82%	1,74%	1,19%	3,51%	3,35%
Variância	0,79%	0,94%	0,87%	1,17%	1,90%	0,98%	1,39%	1,32%	2,01%	1,44%	
Terceiro Momento	0,00006	0,00019	-0,00025	0,00003	-0,00056	0,00025	-0,00019	0,00013	0,00083	-0,00012	
Semivariância	0,34%	0,33%	0,62%	0,47%	0,68%	0,39%	0,49%	0,42%	0,92%	0,79%	
Fev02 a Jan07											
Retorno Médio	1,47%	6,11%	0,50%	3,47%	2,10%	2,98%	0,26%	1,42%	1,70%	2,80%	3,21%
Variância	0,79%	0,94%	0,86%	1,17%	1,90%	0,97%	1,39%	1,31%	1,99%	1,44%	
Terceiro Momento	0,00006	0,00014	-0,00024	0,00002	-0,00048	0,00023	-0,00022	0,00019	0,00094	-0,00013	
Semivariância	0,34%	0,33%	0,61%	0,47%	0,69%	0,39%	0,50%	0,43%	0,94%	0,80%	
Mar02 a Fev07											
Retorno Médio	0,76%	8,13%	0,43%	2,64%	5,53%	2,20%	2,94%	3,10%	0,83%	1,17%	3,31%
Variância	0,78%	0,93%	0,84%	1,17%	1,90%	0,95%	1,37%	1,30%	1,99%	1,45%	
Terceiro Momento	0,00009	0,00017	-0,00020	0,00010	-0,00047	0,00028	-0,00019	0,00025	0,00110	-0,00006	
Semivariância	0,35%	0,32%	0,60%	0,48%	0,67%	0,39%	0,49%	0,42%	0,93%	0,79%	
Abr02 a Mar07											
Retorno Médio	2,96%	8,44%	-0,13%	3,32%	7,83%	2,14%	6,42%	4,73%	0,05%	-0,29%	3,94%
Variância	0,78%	0,93%	0,78%	1,18%	1,89%	0,94%	1,39%	1,30%	1,98%	1,44%	
Terceiro Momento	0,00009	0,00017	-0,00017	0,00007	-0,00060	0,00026	-0,00029	0,00027	0,00105	-0,00007	
Semivariância	0,36%	0,33%	0,54%	0,50%	0,68%	0,39%	0,49%	0,43%	0,94%	0,80%	
Mai02 a Abr07											
Retorno Médio	1,76%	7,49%	2,26%	2,49%	5,44%	2,22%	5,24%	5,15%	1,94%	1,91%	3,80%
Variância	0,77%	0,94%	0,84%	1,17%	1,90%	0,94%	1,38%	1,29%	1,98%	1,46%	
Terceiro Momento	0,00008	0,00014	-0,00013	0,00004	-0,00053	0,00023	-0,00021	0,00028	0,00095	-0,00015	
Semivariância	0,36%	0,34%	0,55%	0,50%	0,69%	0,40%	0,50%	0,44%	0,95%	0,81%	
Jun02 a Mai07											
Retorno Médio	0,51%	6,63%	3,06%	3,40%	7,17%	3,12%	8,15%	4,37%	2,84%	3,96%	3,80%
Variância	0,77%	0,91%	0,84%	1,17%	1,89%	0,93%	1,40%	1,29%	1,97%	1,44%	
Terceiro Momento	0,00007	0,00016	-0,00013	-0,00004	-0,00065	0,00018	-0,00025	0,00024	0,00077	-0,00026	
Semivariância	0,37%	0,35%	0,57%	0,50%	0,70%	0,39%	0,51%	0,45%	0,94%	0,79%	
Jul02 a Jun07											
Retorno Médio	1,14%	5,25%	3,26%	1,68%	5,97%	2,25%	8,31%	6,38%	4,33%	5,90%	3,46%
Variância	0,76%	0,91%	0,81%	1,12%	1,85%	0,91%	1,37%	1,28%	1,97%	1,39%	
Terceiro Momento	0,00004	0,00016	-0,00015	0,00001	-0,00070	0,00016	-0,00027	0,00015	0,00060	-0,00027	
Semivariância	0,36%	0,37%	0,56%	0,47%	0,69%	0,39%	0,51%	0,46%	0,94%	0,73%	

Ago02 a Jul07											
Retorno Médio	2,32%	4,98%	6,13%	2,53%	6,60%	2,10%	8,67%	5,29%	1,92%	4,26%	3,33%
Variância	0,69%	0,91%	0,77%	1,01%	1,68%	0,79%	1,36%	1,30%	1,91%	1,38%	
Terceiro Momento	0,00010	0,00014	-0,00015	0,00015	-0,00046	0,00039	-0,00035	0,00017	0,00072	-0,00027	
Semivariância	0,31%	0,38%	0,52%	0,39%	0,58%	0,29%	0,51%	0,48%	0,90%	0,74%	

Set02 a Ago07											
Retorno Médio	3,76%	4,72%	8,26%	4,09%	5,47%	3,29%	7,81%	5,24%	2,93%	5,52%	3,75%
Variância	0,69%	0,88%	0,77%	0,98%	1,68%	0,74%	1,34%	1,29%	1,91%	1,38%	
Terceiro Momento	0,00013	0,00012	-0,00015	0,00019	-0,00040	0,00038	-0,00038	0,00024	0,00078	-0,00027	
Semivariância	0,31%	0,35%	0,51%	0,38%	0,57%	0,29%	0,50%	0,47%	0,90%	0,73%	

Out02 a Set07											
Retorno Médio	4,73%	8,96%	6,76%	4,40%	4,91%	4,39%	7,11%	4,49%	3,89%	4,52%	4,81%
Variância	0,64%	0,94%	0,70%	0,87%	1,54%	0,65%	1,20%	1,17%	1,72%	1,17%	
Terceiro Momento	0,00018	0,00026	-0,00005	0,00034	-0,00024	0,00050	-0,00015	0,00043	0,00110	0,00036	
Semivariância	0,27%	0,38%	0,48%	0,31%	0,50%	0,23%	0,40%	0,40%	0,75%	0,57%	

Nov02 a Out07											
Retorno Médio	8,71%	8,17%	2,09%	5,56%	6,35%	4,13%	8,33%	4,96%	3,06%	2,09%	5,00%
Variância	0,66%	0,93%	0,67%	0,84%	1,51%	0,48%	1,15%	1,05%	1,62%	1,14%	
Terceiro Momento	0,000207	0,000281	-0,000053	0,000311	-0,000171	0,000023	-0,000132	0,000188	0,001084	0,000414	
Semivariância	0,26%	0,37%	0,49%	0,30%	0,49%	0,22%	0,39%	0,39%	0,74%	0,56%	

Dez02 a Nov07											
Retorno Médio	8,41%	6,67%	0,59%	2,83%	4,58%	2,88%	5,64%	3,27%	-0,09%	-0,16%	3,28%
Variância	0,66%	0,94%	0,67%	0,84%	1,51%	0,47%	1,08%	1,06%	1,64%	1,13%	
Terceiro Momento	0,00022	0,00030	-0,00003	0,00032	-0,00008	0,00002	-0,00017	0,00019	0,00113	0,00040	
Semivariância	0,26%	0,37%	0,48%	0,30%	0,48%	0,20%	0,38%	0,38%	0,74%	0,53%	

Anexo D – Retorno médio, variância, terceiro momento e semivariância do grupo 2

	AMBV4	VIVO4	EBTP4	ITSA4	SDIA4	EMBR3	BBAS3	ARCZ6	VCPA4	KLBN4	IBOV
Jan02 a Dez06											
Retorno Médio	3,08%	9,07%	0,96%	4,24%	7,54%	2,23%	5,28%	2,84%	4,18%	1,75%	3,35%
Variância	0,60%	2,00%	3,93%	0,90%	1,06%	1,06%	1,55%	0,86%	0,67%	1,07%	
Terceiro Momento	0,00007	0,00005	0,00309	0,00000	0,00038	0,00008	-0,00065	0,00030	0,00018	0,00116	
Semivariância	0,28%	1,31%	1,84%	0,36%	0,34%	0,53%	0,66%	0,36%	0,30%	0,34%	
Fev02 a Jan07											
Retorno Médio	4,25%	7,12%	0,83%	4,97%	8,99%	2,85%	6,74%	2,14%	3,11%	2,16%	3,21%
Variância	0,59%	1,98%	3,89%	0,90%	1,05%	1,06%	1,49%	0,89%	0,67%	1,06%	
Terceiro Momento	0,00005	0,00003	0,00288	-0,00004	0,00037	0,00007	-0,00071	0,00035	0,00018	0,00116	
Semivariância	0,29%	1,30%	1,81%	0,36%	0,35%	0,54%	0,62%	0,39%	0,31%	0,34%	
Mar02 a Fev07											
Retorno Médio	1,51%	2,97%	-2,37%	4,56%	5,98%	2,51%	6,58%	0,89%	2,47%	3,85%	3,31%
Variância	0,60%	1,98%	3,97%	0,88%	1,07%	1,07%	1,47%	0,86%	0,66%	1,06%	
Terceiro Momento	0,00007	0,00008	0,00314	0,00001	0,00039	0,00004	-0,00061	0,00039	0,00021	0,00120	
Semivariância	0,29%	1,28%	1,86%	0,35%	0,35%	0,52%	0,60%	0,38%	0,30%	0,33%	
Abr02 a Mar07											
Retorno Médio	2,84%	1,53%	-1,87%	4,88%	-0,85%	1,90%	6,38%	0,41%	1,13%	4,14%	3,94%
Variância	0,61%	1,90%	3,94%	0,88%	1,10%	1,08%	1,47%	0,87%	0,66%	1,04%	
Terceiro Momento	0,00004	0,00015	0,00285	0,00000	0,00036	0,00007	-0,00052	0,00039	0,00021	0,00114	
Semivariância	0,29%	1,21%	1,86%	0,36%	0,39%	0,54%	0,62%	0,40%	0,31%	0,31%	
Mai02 a Abr07											
Retorno Médio	4,34%	5,07%	1,69%	4,54%	1,41%	1,54%	5,54%	-0,48%	1,22%	5,78%	3,80%
Variância	0,60%	2,05%	3,91%	0,88%	1,10%	1,07%	1,44%	0,86%	0,65%	1,04%	
Terceiro Momento	0,00005	0,00038	0,00235	-0,00003	0,00037	0,00010	-0,00046	0,00041	0,00021	0,00108	
Semivariância	0,29%	1,23%	1,78%	0,37%	0,40%	0,55%	0,63%	0,41%	0,32%	0,31%	
Jun02 a Mai07											
Retorno Médio	4,97%	2,91%	1,81%	5,37%	0,62%	0,81%	5,60%	-1,70%	0,15%	3,93%	3,80%
Variância	0,61%	2,04%	3,78%	0,85%	1,09%	1,06%	1,45%	0,86%	0,64%	1,04%	
Terceiro Momento	0,00002	0,00031	0,00221	-0,00006	0,00033	0,00016	-0,00056	0,00040	0,00022	0,00108	
Semivariância	0,30%	1,22%	1,67%	0,35%	0,41%	0,56%	0,64%	0,42%	0,33%	0,32%	
Jul02 a Jun07											
Retorno Médio	4,64%	2,47%	1,55%	3,82%	-1,11%	1,23%	5,01%	0,41%	0,95%	4,63%	3,46%
Variância	0,59%	1,98%	2,92%	0,83%	1,09%	1,06%	1,23%	0,87%	0,64%	1,00%	
Terceiro Momento	0,00000	0,00021	0,00737	-0,00006	0,00032	0,00018	0,00000	0,00040	0,00022	0,00104	
Semivariância	0,30%	1,19%	0,86%	0,35%	0,42%	0,59%	0,45%	0,44%	0,35%	0,31%	

Ago02 a Jul07

Retorno Médio	3,23%	1,56%	1,51%	2,29%	-2,68%	-0,43%	4,60%	0,74%	2,50%	4,35%	3,33%
Variância	0,59%	1,94%	2,92%	0,75%	1,08%	1,10%	1,22%	0,87%	0,64%	1,00%	
Terceiro Momento	0,00000	0,00024	0,00749	0,00005	0,00028	0,00019	-0,00005	0,00046	0,00021	0,00104	
Semivariância	0,31%	1,18%	0,89%	0,29%	0,43%	0,65%	0,46%	0,48%	0,36%	0,32%	

Set02 a Ago07

Retorno Médio	5,05%	3,78%	4,36%	2,43%	-2,33%	-1,05%	4,00%	2,23%	3,36%	3,21%	3,75%
Variância	0,59%	1,92%	1,90%	0,73%	1,09%	1,06%	1,11%	0,81%	0,63%	1,02%	
Terceiro Momento	-0,00001	0,00025	0,00057	0,00008	0,00033	0,00014	-0,00018	0,00049	0,00019	0,00108	
Semivariância	0,30%	1,16%	0,88%	0,28%	0,44%	0,60%	0,47%	0,40%	0,35%	0,33%	

Out02 a Set07

Retorno Médio	3,30%	4,53%	3,60%	3,49%	0,40%	-2,03%	6,05%	4,55%	5,69%	4,48%	4,81%
Variância	0,59%	1,75%	1,82%	0,63%	1,05%	1,08%	0,95%	0,81%	0,64%	1,03%	
Terceiro Momento	-0,00002	0,00057	0,00057	0,00023	0,00032	0,00017	0,00015	0,00049	0,00019	0,00105	
Semivariância	0,33%	1,04%	0,85%	0,22%	0,44%	0,66%	0,35%	0,44%	0,38%	0,33%	

Nov02 a Out07

Retorno Médio	3,55%	1,81%	2,56%	3,05%	2,14%	-1,81%	5,55%	3,57%	5,27%	3,11%	5,00%
Variância	0,49%	1,59%	1,84%	0,51%	0,99%	1,05%	0,91%	0,81%	0,64%	1,03%	
Terceiro Momento	-0,000230	0,000139	0,000438	-0,000023	0,000272	0,000190	0,000169	0,000501	0,000192	0,001070	
Semivariância	0,32%	1,02%	0,82%	0,21%	0,42%	0,64%	0,34%	0,43%	0,37%	0,32%	

Dez02 a Nov07

Retorno Médio	0,76%	2,55%	-0,05%	1,51%	2,84%	-2,33%	3,50%	3,72%	5,84%	2,80%	3,28%
Variância	0,50%	1,59%	1,77%	0,50%	0,99%	1,05%	0,91%	0,81%	0,64%	1,02%	
Terceiro Momento	-0,00022	0,00012	0,00041	-0,00002	0,00026	0,00019	0,00018	0,00050	0,00019	0,00113	
Semivariância	0,33%	1,01%	0,87%	0,20%	0,42%	0,63%	0,33%	0,42%	0,36%	0,31%	

Anexo E – resultados para 2008
Resultados obtidos com base no retorno e variância

Inicialmente são mostrados os resultados obtidos considerando que o investidor apresenta preferências por retorno esperado e variância. Além das informações sobre retorno esperado e variância outras medidas são fornecidas sobre o desempenho dos grupos 1 e 2.

Tabela Anexo E 1. Resultados do grupo 1 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2008, conforme preferências do investidor por retorno esperado e variância.

Preferênciais		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	-28.87%	-43.60%
Retorno Médio	-2.41%	-3.63%
Variância	0.91%	1.04%
Semivariância	0.37%	0.44%
Assimetria	-0.2374	0.3015

Fonte: Elaboração própria, 2009.

A Tabela Anexo E 1 mostra que a menor perda é definida para o grupo 1 quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Com base nessa preferência, o modelo de seleção, durante o ano 2008, gerou um portfólio com uma menor variância. Quando o investidor adota a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ o resultado da seleção de portfólios apresentou uma assimetria positiva.

Para o grupo 2, conforme Tabela Anexo E 2, a menor perda foi obtida com base na preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Quando o investidor adota uma maior preferência por retorno (que acabou não ocorrendo) o resultado da seleção apresenta um menor risco e assimetria positiva, porém o retorno é negativo.

Tabela Anexo E 2 Resultados do grupo 2 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2008, conforme preferências do investidor por retorno esperado e variância.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	-42.64%	-44.86%
Retorno Médio	-3.55%	-3.74%
Variância	1.15%	1.11%
Semivariância	0.67%	0.67%
Assimetria	-0.7108	0.7320

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Embora o modelo de seleção definido com base na variância não apresente uma preocupação com a concentração dos resultados, percebe-se que uma maior preferência por retorno foi responsável por uma assimetria positiva, nos grupos 1 e 2.

Resultados obtidos com base no retorno e assimetria

Em seguida, são demonstrados os resultados obtidos considerando que o investidor apresenta preferência por retorno esperado e assimetria. Além das informações sobre retorno esperado e assimetria outras medidas são fornecidas sobre o desempenho dos grupos 1 e 2.

Tabela Anexo E 3 Resultados do grupo 1 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2008, conforme preferências do investidor por retorno esperado e assimetria.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	-27.92%	-35.66%
Retorno Médio	-2.33%	-2.97%
Variância	1.28%	1.34%
Semivariância	0.34%	0.47%
Assimetria	0.6244	0.3552

Fonte: Elaboração própria, 2009.

A Tabela Anexo E 3 mostra que a menor perda é obtida, para o grupo 1, quando o investidor apresenta a preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Agora, quando o investidor adota a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, uma maior preferência por retorno (que acabou não ocorrendo) é compensada por uma menor assimetria.

No grupo 2 o resultado entre as preferências por retorno esperado e assimetria não foi diferente. Ou seja, a menor perda foi obtida quando o investidor apresentou a preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. No entanto, diferentemente do grupo 1, as duas estratégias foram responsáveis por uma assimetria negativa, conforme Tabela Anexo E 4.

Tabela Anexo E 4 Resultados do grupo 2 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2008, conforme preferências do investidor por retorno esperado e assimetria.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	-28.84%	-39.03%
Retorno Médio	-2.4%	-3.3%
Variância	1.3%	1.4%
Semivariância	0.6%	0.7%
Assimetria	-0.3175	-0.2989

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Resultados obtidos com base no retorno e semivariância

Por último, são demonstrados os resultados obtidos considerando que o investidor apresenta preferência por retorno esperado e semivariância. Além das informações sobre retorno esperado e semivariância outras medidas são fornecidas sobre o desempenho dos grupos 1 e 2.

Tabela Anexo E 5 Resultados do grupo 1 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2008, conforme preferências do investidor por retorno esperado e semivariância.

Preferências		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	-38.04%	-43.74%
Retorno Médio	-3.17%	-3.65%
Variância	0.98%	1.05%
Semivariância	0.38%	0.45%
Assimetria	0.2301	0.2838

Fonte: Elaboração própria, 2009.

A Tabela Anexo E 5 mostra que a menor perda é obtida, para o grupo 1, quando o investidor apresenta a preferência $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Agora, quando o investidor adota a preferência $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, uma maior preferência por retorno (que acabou não ocorrendo) é acompanhada por uma maior semivariância.

No grupo 2 o resultado entre as preferências por retorno esperado e semivariância foi diferente. Ou seja, a menor perda foi obtida quando o investidor apresentou a preferência

$\alpha = 3$ e $\beta = 1$. No entanto, diferentemente do grupo 1, as duas estratégias foram responsáveis por uma assimetria negativa, conforme Tabela Anexo E 6.

Tabela Anexo E 6 Resultados do grupo 2 obtidos no período de janeiro a dezembro de 2008, conforme preferências do investidor por retorno esperado e semivariância.

Preferência		
alfa	1	3
beta	1	1
Retorno no Período	-53.64%	-40.66%
Retorno Médio	-4.47%	-3.39%
Variância	0.94%	1.05%
Semivariância	0.64%	0.62%
Assimetria	-0.8219	-0.8258

Fonte: Elaboração própria, 2009.

Comparações dos resultados obtidos

Com base nos resultados obtidos acima, para o ano de 2008, concluímos que, em relação ao grupo 1, as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), retorno e variância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) e retorno e semivariância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), nessa ordem, apresentaram as menores perdas para o período de 2008. Ainda em relação a essas preferências, o modelo com base no retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) apresentou a maior assimetria bem como a menor semivariância.

Em relação ao grupo 2, as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), retorno e variância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) e retorno e semivariância ($\alpha = 3$ e $\beta = 1$), nessa ordem, apresentaram as menores perdas para o período de 2008. Semelhante ao grupo 1, o modelo com base no retorno e na assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) apresentou a menor semivariância.

Considerando que em 2008 o retorno de mercado, representado pelo IBOVESPA, foi de -42%, as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$), retorno e variância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) e retorno e semivariância ($\alpha = 3$ e $\beta = 1$), para o grupo 1, embora não tenham conseguido superar o ativo livre de risco, apresentam perdas menores que as apresentadas pelo mercado.

Em relação ao grupo 2 as preferências por retorno e assimetria ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) e retorno e semivariância ($\alpha = 3$ e $\beta = 1$), apresentaram perdas menores que as apresentadas pelo mercado. Já preferência por retorno e semivariância ($\alpha = 1$ e $\beta = 1$) promoveu a maior perda entre os modelos apresentados.