



SENAI CIMATEC

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL E TECNOLOGIA INDUSTRIAL
Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial

Dissertação de mestrado

**Caracterização de autossimilaridade de estruturas
rugosas compactas**

Apresentada por: Gleidson de Oliveira Pinto
Orientador: Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves
Co-orientador: José Carlos Oliveira de Jesus

Outubro de 2013

Gleudson de Oliveira Pinto

Caracterização de autossimilaridade de estruturas rugosas compactas

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, Curso de Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial do SENAI CIMATEC, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial**.

Área de conhecimento: Interdisciplinar

Orientador: Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves
SENAI CIMATEC

Co-orientador: José Carlos Oliveira de Jesus
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Salvador, BA
SENAI CIMATEC
2013

Nota sobre o estilo do PPGMCTI

Esta dissertação de mestrado foi elaborada considerando as normas de estilo (i.e. estéticas e estruturais) propostas aprovadas pelo colegiado do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial e estão disponíveis em formato eletrônico (*download* na Página Web http://ead.fieb.org.br/portal_faculdades/dissertacoes-e-teses-mcti.html ou solicitação via e-mail à secretaria do programa) e em formato impresso somente para consulta.

Ressalta-se que o formato proposto considera diversos itens das normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), entretanto opta-se, em alguns aspectos, seguir um estilo próprio elaborado e amadurecido pelos professores do programa de pós-graduação supracitado.

SENAI CIMATEC

Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial

Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial

A Banca Examinadora, constituída pelos professores abaixo listados, leu e recomenda a aprovação da Dissertação de mestrado, intitulada “Caracterização de autossimilaridade de estruturas rugosas compactas”, apresentada no dia 24 de Julho de 2013, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial**.

Orientador:

Prof. Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves
SENAI CIMATEC

Co-orientador:

Prof. Dr. José Carlos Oliveira de Jesus
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Membro interno da Banca:

Prof. Dr. Gilney Figueira Zebende
SENAI CIMATEC

Membro externo da Banca:

Prof. Dr. José Garcia Vivas Miranda
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Membro externo da Banca:

Prof. Dr. Paulo Monteiro Vieira Braga Barone
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

Dedico este trabalho a Eliade, minha esposa, que sempre me incentivou e me apoiou, a Anna Morena e Paola, que em muitas horas atrapalhavam meus estudos, exigindo e dando atenção, amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus, este grande mistério cujo verbo são as Leis que tentamos desvendar.

Ao Prof. Dr. Marcelo Albano Moret, pelo convite ao programa do mestrado, pela orientação, dedicação ao tema e amizade.

Ao Prof. Dr. José Carlos Oliveira de Jesus, pela co-orientação, pelo tempo gasto nas discussões relacionadas ao tema, pelas correções e pela amizade.

À Antonio Cesar, por toda a ajuda na elaboração desta dissertação.

Aos colegas do mestrado e do projeto Física no Campus (UEFS) pelas discussões e ajuda nos experimentos.

Salvador, Brasil
24 de Outubro de 2013

Gleidson de Oliveira Pinto

Resumo

Relações de empacotamento têm despertado grande interesse ao longo da última década. Cada vez mais, novas estruturas encontram-se no foco das investigações; a maioria destas novas estruturas são objetos regulares e pouco se tem feito em relação a objetos irregulares. Nesse sentido, foram feitas simulações analógicas utilizando bolas de papel amassado, livres (i.e. sem vínculos entre elas), a fim de investigar as características geométricas (dimensão) e as frações de empacotamento, comparando-as com aglomerados de objetos regulares (bolas de isopor). A simulação analógica consiste em preencher cavidades cúbicas de diferentes arestas com bolas de papel amassado de diferentes diâmetros, de forma a ocupar toda a cavidade sem exceder sua borda; a mesma metodologia foi empregada nas simulações com bolas de isopor. A partir da quantidade de bolas, massa do aglomerado e da aresta da cavidade medimos indiretamente a fração de empacotamento e a dimensão d do aglomerado. As bolas de papel foram feitas amassando-se quadrados de papel, de densidade 75 g/m^2 , com áreas entre 64 e 289 cm^2 . Foram usadas 10 cavidades cúbicas cujas arestas variavam entre 4 e 13 cm. Os resultados indicam uma fração de empacotamento que em alguns casos excedem aos encontrados para esferas sólidas, no entanto, quando comparadas aos resultados encontrados para bolas de isopor verificou-se que seus valores são menores. Resultados preliminares para a dimensão do aglomerado apresentam tendência a valores médios próximos a 2,8. Foram realizados também alguns estudos de simulação computacional deste sistema. Por fim, medidas de aglomerado de bolas de papel com dois tamanhos diferentes misturados, apresentaram um comportamento, em relação a fração de empacotamento, semelhante ao encontrado para proteínas que possuem até 60 % de estruturas secundárias em sua composição.

Palavras Chaves: Fração de Empacotamento, Fractais, Dimensão de Aglomerados

Abstract

Packaging's relations have attracted great interest over the years. Increasing new structures are founded on the focus of investigations, the most of these news structures are regular objects and little things has been done regarding the irregulars objects. In this sense were be analogically simulations using the crumpled paper balls (no linkages between them) for the purpose of to investigate the geometrical characteristics (dimension) and the fractional packing, comparing them with some clusters of regular objects (styrofoam balls). The analogical simulation consists in to full cubic cavities of different edges with different sizes of crumpled paper balls, so these must have all the cavity occupied; this methodology was used in simulations with styrofoam balls. The fractional packing and the proportion d of cluster were measured from the quantity of balls, the mass of the agglomerate and from the edge's cavity. The paper balls were made kneading paper's square with density of $75g/m^2$, and areas between 64 and 289 cm^2 . In this experiment it was used ten cubics cavity whose edge varies between 4 and 13 cm. The results indicate a packing fraction which in some cases exceed those founded for solid spheres, however, when compared to the results for styrofoam balls were found that their value are smaller. Preliminary results for the cluster's proportion show the tendency to medium values near 2,8. Some studies of computer simulation of this system were also realized. Finally, measures of paper balls' agglomerate with two different sizes mixed, that showed a behavior similar to the behavior found between some proteins that have until 60% of secondary structures in their composition.

Keywords: Packing Fraction, Fractals, Dimension Clusters

Sumário

1	Introdução	1
2	Introdução aos Fractais e ao Problema de Empacotamento	4
2.1	Monstros matemáticos	5
2.1.1	Conjunto de Cantor	5
2.1.2	Curva de Koch e floco de neve de Koch ou ilha de Koch	6
2.1.3	Curva de Peano-Hilbert	8
2.1.4	Triângulo de Sierpinski	10
2.2	Características de um fractal	11
2.2.1	Autossemelhança	12
2.2.2	Dimensão	12
2.3	Empacotamento	19
3	Trabalho experimental e desenvolvimento da pesquisa	23
3.1	Modelo proposto	25
3.2	Resultados e Discussão	27
4	Conclusão	42
A	Histograma das Distribuições de Diâmetros	45
B	Gráficos da dimensão dos aglomerados	50
	Referências	56

Lista de Tabelas

2.1	Valores da dimensão de similaridade de alguns monstros matemáticos. . . .	15
3.1	Tabela do número de quadrados produzidos para cada aresta.	24
3.2	Tabela do tamanho dos quadrados que originaram as bolas de papel e suas respectivas densidades.	25
3.3	Valores para diâmetro e volume dos diferentes tamanhos de bolas.	29
3.4	Valores da razão entre volume das cavidades e das bolas e fração de empacotamento.	29
3.5	Valores da razão entre aresta e diâmetro das bolas e fração de empacotamento.	30
3.6	Valores de fração de empacotamento para bolas de isopor e bolas de papel de tamanho 15x15.	30
3.7	Valores dos raios para esferas com dimensão 2,51 a partir de esferas de dimensão 3	31
3.8	Configurações do sistema que apresentam os mesmos valores para as redes de Bravais cúbica simples e de corpo centrado.	33
3.9	Valores das dimensões encontradas pela relação do número de bolas pelos seus diâmetros.	37

Lista de Figuras

2.1	Representação geométrica das etapas de construção do conjunto de Cantor. (Fonte: autor.)	6
2.2	As três primeiras gerações para a construção da curva de Koch. (Fonte: autor.)	7
2.3	As três primeiras gerações do floco de neve de Koch. (Fonte: autor.)	8
2.4	Construção da curva de Peano, com seu iniciador e gerador. (Fonte: autor.)	9
2.5	Construção da curva de Hilbert e seu gerador. (Fonte: NUNES, 2006).	10
2.6	As cinco primeiras gerações do triângulo de Sierpinski. (Fonte: autor.)	11
2.7	Cada parte da figura apresenta semelhança com a figura toda. (Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt.)	12
2.8	Cobertura de um conjunto de pontos por discos. (Fonte: Addison, 1997.)	13
2.9	Cobertura de uma linha e um plano por discos. (Fonte: Addison, 1997.)	13
2.10	Linha, quadrado e cubo divididos em elementos autossemelhantes. (Fonte: autor)	14
2.11	Método de determinação da dimensão de BoxCounting. (Fonte: Addison, 1997.)	16
2.12	Diferentes elementos de sondagem de comprimento linear δ cobrem a curva. (Fonte: Addison, 1997.)	17
2.13	Arranjo de esferas rígidas para rede hexagonal e cúbica de face centrada. (Fonte: autor)	20
2.14	Empacotamento de Apolônio em 2-dimensões. (Fonte: Aste, 2000)	22
3.1	Folha de papel A4 impressa com quadrados de diferentes tamanhos.	23
3.2	Bolas de papel com diferentes tamanhos.	24
3.3	Cavidade cúbica de aresta L	25
3.4	Área recoberta por discos de diâmetro D	27
3.5	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas $08 \times 08 \text{ cm}^2$	28
3.6	Valores da fração de empacotamento em função do tamanho da aresta da cavidade cúbica.	32
3.7	Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado de bolas de isopor	33
3.8	Gráfico do número de bolas que preenche uma cavidade em função do seu diâmetro.	34
3.9	Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	35
3.10	Gráfico do número de bolas que preenche uma cavidade em função do seu diâmetro para as quatro maiores cavidades.	35
3.11	Gráfico do logaritmo do número de bolas que preenche uma cavidade em função do seu diâmetro para as quatro maiores cavidades.	36
3.12	Imagens criada por meio de simulação computacional. A imagem da esquerda foi criada com 400 pontos e a da direita com 4000 pontos.	37
3.13	Relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17×17 em relação as bolas 08×08	38
3.14	Curva da relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17×17 em relação as bolas 12×12	39

3.15	O gráfico mostra duas curvas da relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17x17 em relação as bolas 08x08 e 12x12, com volumes calculados para o expoente 2,51.	40
3.16	O gráfico mostra duas curvas da relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17x17 em relação as bolas 08x08 e 12x12, com volumes calculados para o expoente 3.	41
A.1	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 09x09.	45
A.2	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 10x10.	46
A.3	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 11x11.	46
A.4	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 12x12.	47
A.5	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 13x13.	47
A.6	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 14x14.	48
A.7	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 15x15.	48
A.8	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 16x16.	49
A.9	Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 17x17.	49
B.1	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	50
B.2	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	51
B.3	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	51
B.4	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	52
B.5	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	52
B.6	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	53
B.7	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	53
B.8	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	54
B.9	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	54
B.10	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	55
B.11	Grafico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.	55

Lista de Algoritmos

Lista de Siglas

PPGMCTI ..	Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial
WWW	World Wide Web
FCC	Rede Cúbica de Face Centrada
HCP	Rede Hexagonal

Introdução

“O que cabe na bolsa de uma mulher?” A essa pergunta segue-se a resposta: “Maybe the World” (BACKES; BRUNO, 2005). Essa ideia preenche o imaginário das pessoas, a ponto de pensarmos que é possível encontrar qualquer coisa em uma bolsa de mulher. Esses recipientes imaginários parecem não ter fundo, como se nelas coubesse de tudo. Mas quantos objetos cabem realmente na bolsa de uma mulher? Se esse não fosse um problema retórico, provocaria dor de cabeça em muitos cientistas que estudam problemas de empacotamento.

Problemas de empacotamento vêm sendo estudados desde o século XVII, quando Johannes Kepler pela primeira vez se questionou sobre qual a melhor forma de empilhar bolas de canhão (ASTE; WEAIRE, 2000)(TORQUATO; STILLINGER, 2010) . Hilbert, em 1900, percebendo a importância dos estudos de empacotamento, propõe como um dos problemas que norteariam a pesquisa em matemática no século XX. Ainda hoje, o problema de empacotamento desperta grande interesse da comunidade científica (ASTE; WEAIRE, 2000; SILVA; A.M.SEGADÃES; DEVEZAS, 2004). Os modelos físico-matemáticos desenvolvidos a partir dos estudos sobre empacotamento servem de base para entender o comportamento de diversas estruturas, desde redes cristalinas a proteínas (ASTE; WEAIRE, 2000; AMOREIRA; JESUS, 2012; STARIOLO, 2012; TORQUATO; STILLINGER, 2010) .

A característica de maior interesse nos estudos de empacotamento é a fração de empacotamento, ou seja, a fração do espaço ocupado pelos objetos que formam um aglomerado em relação ao espaço total. Apesar da fração de empacotamento dar a quantidade de espaço ocupado, ela não determina de que forma se dá a ocupação. Uma das propriedades associadas à forma como um objeto ocupa o espaço é a dimensão de ocupação ou dimensão fractal.

Os fractais que foram estudados pela primeira vez por Mandelbrot (MANDELBROT, 1977) e apresentados ao mundo em sua obra *The fractal geometry of nature*, são estruturas que apresentam autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fracionária. Dentre suas propriedades, a dimensão fractal, associada à irregularidade da forma dos objetos e sua ocupação espacial, é a mais utilizada pelos pesquisadores para caracterizar esses objetos.

Estruturas regulares, em geral, são construções da mente humana que tentam imitar as formas observadas na natureza, de forma que se possa criar um modelo padrão para ser copiado e manipulado sem alterar suas características. Essas formas permitem ao homem

somente criar modelos regulares que muito pouco se assemelham às formas naturais. Apenas a partir de 1977 com os primeiros estudos sobre a geometria fractal, foi possível ao ser humano descrever a natureza com maior precisão, considerando suas formas irregulares.

Dentre os diversos objetos estudados pela geometria fractal, podemos citar a bola de papel amassado (GOMES, 1987), cuja dimensão foi determinada como 2,51, a partir de experimentos que mediam a relação massa-tamanho desses objetos. Apesar dos estudos realizados caracterizarem bem a estrutura geométrica da bola de papel amassado, não há referências às propriedades de aglomerados desses objetos.

Os aglomerados de bolas de papel amassado podem ser comparados, em termos geométricos, as estruturas de proteínas enoveladas. O estado nativo das proteínas é determinado pela sequência dos seus aminoácidos, e sua grande variedade de funções geralmente depende da complementaridade entre a forma da superfície da proteína e da molécula específica com a qual interage. Acredita-se que pequenas alterações da forma estrutural da proteína podem causar perda ou alteração das atividades da proteína. Portanto, o conhecimento de sua compacticidade é significativo na compreensão do estado de enovelamento de proteínas. Dessa forma, as bolas de papel podem servir de modelos analógicos para as proteínas, que possuem dimensão fractal semelhante às das bolas de papel (MORET et al., 2005).

A maioria das pesquisas desenvolvidas sobre empacotamento trata de aglomerados de objetos regulares ou modelados como regulares, não fazendo menção à dimensão do aglomerado. O empacotamento de objetos irregulares é pouco estudado, portanto seu comportamento demanda uma caracterização teórica e experimental. Dessa maneira, o trabalho aqui apresentado é uma contribuição ao estudo de empacotamento de objetos irregulares. O empacotamento foi realizado utilizando bolinhas de papel amassado, para as quais foram determinadas a fração de empacotamento e a dimensão fractal dos aglomerados.

No segundo capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica acerca dos fractais, fazendo uma referência cronológica, começando pelas funções matemáticas que no século XIX não podiam ser explicadas pela matemática vigente. Em seguida, são descritas as propriedades dos fractais, dando-se ênfase ao estudo de dimensão. Por fim, faz-se uma revisão dos estudos de empacotamento.

O terceiro capítulo traz a descrição da montagem experimental e da metodologia empregada nas medidas. Descreve-se como foram confeccionadas as bolas de papel e as cavidades utilizadas nas medidas. Apresenta-se também a forma como foram feitas as medidas e os instrumentos utilizados.

Ainda no terceiro capítulo, propõe-se um modelo matemático para a dimensão fractal do aglomerado. A partir do modelo proposto por Feder para aglomerados de monômeros

([FEDER, 1988](#)) chegou-se a um modelo para determinar a dimensão fractal a partir dos dados de massa e tamanho da aresta da cavidade.

Os resultados são discutidos na seção 3.2, em que apresentamos os valores das frações de empacotamento e de dimensões fractais em função da massa das bolinhas para diferentes cavidades. Além disso, faz-se uma comparação entre aglomerados de bolas de dois tamanhos diferentes (sistemas binários) e estruturas proteicas.

O quarto capítulo está reservado para análise dos resultados e considerações finais.

Introdução aos Fractais e ao Problema de Empacotamento

Por que a geometria é frequentemente descrita como “fria” e “seca”? Uma razão repousa em sua inabilidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, uma linha costeira ou uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, e uma casca de árvore não é lisa, tampouco um feixe de luz viaja em linha reta. (...) Eu afirmo que muitos dos padrões da Natureza são tão irregulares e fragmentados, que, se comparados com a geometria tradicional, exibem não somente um grau mais alto, mas um nível de complexidade completamente diferente.

(Mandelbrot, 1977, p. 1)

Como podemos representar as formas da natureza? As estruturas geométricas que estudamos e dominamos desde nossos primeiros anos escolares em nada se assemelham às formas naturais que nos rodeiam; apenas as construções humanas se aproximam das formas apresentadas pela geometria euclidiana. Euclides (325 - 265 a.C.) sintetizou em seus Elementos, distribuído em 13 volumes, todo o conhecimento geométrico da época; sua obra perdurou por mais de 2000 anos como única teoria geométrica (BOYER, 1996). No entanto, no fim do século XIX e início do XX matemáticos como Cantor, Koch, Sierpinski, Peano e Hilbert investigaram objetos que punham em cheque algumas das bases matemáticas da época relacionadas com a análise, álgebra e geometria (NUNES, 2006). Estes objetos foram considerados como monstros matemáticos, por não se enquadrarem em definições convencionais da geometria euclidiana.

Apesar do conceito de fractal ter sido cunhado por Mandelbrot (MANDELBROT, 1977), as bases para a sua origem se deram muito antes com os estudos de Henri Poincaré quando desenvolveu as ferramentas que criavam um terreno comum entre o simples (linear e determinístico) e o complexo (não linear e caótico). Poincaré descobriu que sistemas lineares, regidos por leis simples, podem originar dinâmicas complicadas de formas irregulares e que sistemas aleatórios poderia gerar formas regulares (MIRANDA, 2000).

Posterior a Poincaré, as ideias de fractais começaram a germinar no trabalho de alguns matemáticos entre 1857 e 1913, com o surgimento dos monstros matemáticos. Karl Weierstrass encontrou uma função com a propriedade de ser contínua em todo seu domínio,

mas em nenhum ponto se podia derivá-la. Em 1904 Koch, insatisfeito com a definição abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica a uma função similar. Muitos outros trabalhos relacionados a estas figuras foram publicados, entretanto, os estudos desses problemas desenvolveram-se plenamente a partir da década de 1960 com os estudos de Mandelbrot (NUNES, 2006).

2.1 Monstros matemáticos

Essa seção e subseções foram produzidas a partir das referências (MANDELBROT, 1977), (NUNES, 2006), (MIRANDA, 2000), (PEREIRA, 2007), (M.JANOS, 2009) e (ADDISON, 1997).

2.1.1 Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor ou poeira de Cantor é tido como a primeira figura considerada como um fractal. Além de ser o mais simples, é certamente o mais citado na literatura específica; por isso, iniciaremos nossos estudos dos monstros matemáticos por este objeto.

A construção geométrica da poeira de Cantor se inicia com um segmento de reta de comprimento unitário denominado “iniciador” para a geração k_0 . Esse segmento é então dividido em três segmentos de reta cada um com $1/3$ do comprimento do iniciador; em seguida despreza-se o terço médio, permanecendo com os dois segmentos dos extremos esquerdo e direito. Esse conjunto resultante da primeira geração K_1 é denominado “gerador”. Na segunda geração, k_2 , divide-se novamente cada um dos segmentos restantes em três partes iguais, cada um com um $1/9$ do comprimento do iniciador, e retira-se o terço médio de ambos, resultando agora um conjunto com 4 segmentos de reta com $1/9$ de comprimento cada. Repetimos esse processo até a k -ésima geração. Cabe aqui observar que o fractal conjunto de Cantor apenas é obtido quando $k_n \rightarrow \infty$; antes disso os conjuntos obtidos são considerados como pré-fractais.

Fazendo-se uma análise do conjunto de Cantor, é possível observar uma invariância de escala, isto é, ao fazer uma ampliação qualquer em parte do conjunto, será obtido um novo conjunto exatamente similar ao anterior, e isso continua independente da ampliação ou de quantas vezes o repetimos. Outra observação que vale a pena ser explanada é sobre o seu comprimento: na geração k_0 tem-se 1 segmento com comprimento unitário L , para k_1 são 2 segmentos de comprimento de $(1/3)L$ cada e comprimento total do conjunto δ de $(2/3)L$, para k_2 são 4 segmentos de comprimento de $(1/9)L$ e comprimento total δ de $(4/9)L$, pode-se então definir respectivamente o número de elementos e o comprimento do conjunto, como:



Figura 2.1: Representação geométrica das etapas de construção do conjunto de Cantor. (Fonte: autor.)

$$\begin{aligned}
 N &= 2^n \\
 \delta &= \left(\frac{2}{3}\right)^n L
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Das equações acima observa-se que $N \rightarrow \infty$ então $k_n \rightarrow \infty$ e $\delta \rightarrow 0$, ou seja, quanto maior o número de elementos que o conjunto possui menor é o seu comprimento o que é um paradoxo. Outra complicação aparece quando tentamos definir a dimensão do conjunto de Cantor: a dimensão topológica¹ D_p dos elementos que formam o conjunto é por definição igual a zero, enquanto que a necessidade de uma coordenada para localizar o conjunto aponta para uma dimensão euclidiana D_e igual a um, desta forma, qual seria a real dimensão do conjunto de Cantor?

2.1.2 Curva de Koch e floco de neve de Koch ou ilha de Koch

A curva de Koch é o resultado da tentativa do matemático sueco Niels Von Koch de construir uma curva contínua e não diferenciável, ou seja uma curva que não possui tangente em nenhum ponto. A construção da Curva de Koch dá-se inicialmente com um segmento de reta de valor unitário L , o iniciador para a geração k_0 . Para a geração k_1 divide-se o segmento em três partes iguais de tamanho $(1/3)L$, denominado “iniciador”, e o terço médio é então substituído por um triângulo equilátero, sem a base, e com os lados do triângulo de comprimento igual ao do terço médio retirado, obtendo-se por fim quatro segmentos interligadas com tamanho de $(1/3)L$, que constitui o gerador. Novamente, substituímos cada um dos novos segmentos pelo gerador, o que resulta - para a geração k_2 - em 16 segmentos com tamanho de $(1/9)L$. Repetimos o processo para cada novo

¹ A dimensão topológica será definida adequadamente em uma subseção própria.

segmento de reta resultantes da etapa anterior e assim sucessivamente, obtendo a curva de Koch quando $k_n \rightarrow \infty$. A Figura 2.2 ilustra a construção geométrica da curva de Koch. Como pode-se notar, se a curva de Koch for “ampliada” indefinidamente, sempre resultará em uma curva idêntica à curva inicial.

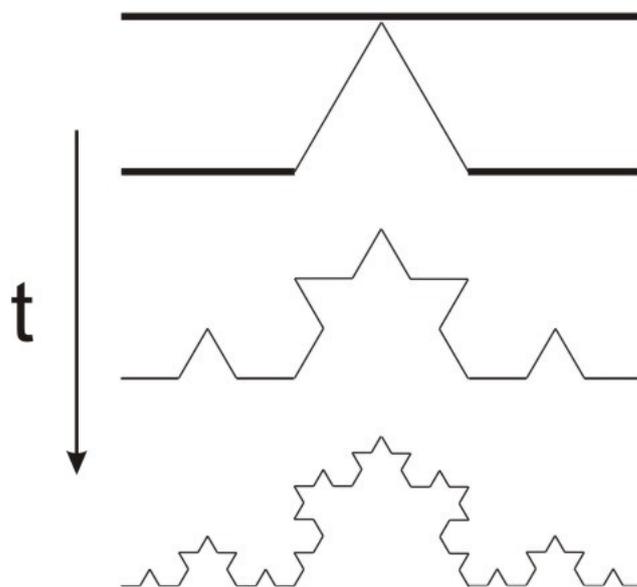


Figura 2.2: As três primeiras gerações para a construção da curva de Koch. (Fonte: autor.)

Analisando-se a curva, verifica-se que a cada geração o número de segmento N aumenta 4^n vezes, o comprimento de cada segmento diminui $(1/3)^n L$ e o comprimento total da curva é:

$$\delta = \left(\frac{4}{3}\right)^n L \quad (2.2)$$

Da equação acima observa-se que $N \rightarrow \infty$, $k_n \rightarrow \infty$ e $\delta \rightarrow \infty$; entretanto, apesar do comprimento da curva de Koch tender a infinito ela ocupa uma área bem definida do espaço. Novamente, quando tentamos definir uma dimensão encontramos uma inconsistência, pois D_p da curva é 1 enquanto que D_e é 2.

O floco de neve de Koch é produzida de forma semelhante à curva de Koch, a diferença é que o iniciador em vez de um segmento é um triângulo equilátero, como é possível observar na Figura 2.3.

Como seu processo de construção é semelhante à construção de três curvas de Koch interligadas entre si, o número de segmentos de reta e seu comprimento total podem ser obtidos apenas multiplicando-se os valores encontrados para a curva de Koch por três, ou seja:

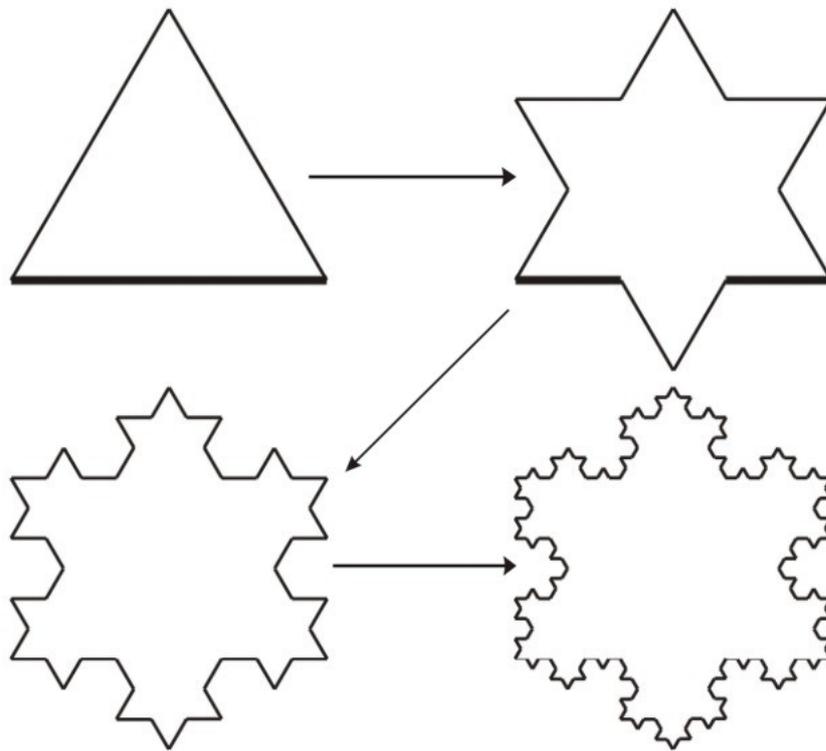


Figura 2.3: As três primeiras gerações do floco de neve de Koch. (Fonte: autor.)

$$\begin{aligned} N &= 3(4)^n \\ \delta &= (3)\left(\frac{4}{3}\right)^n L \end{aligned} \quad (2.3)$$

As demais considerações feitas sobre a curva de Koch podem ser estendidas ao floco de neve.

2.1.3 Curva de Peano-Hilbert

A curva de Peano-Hilbert não é uma única curva, mas uma classe de curvas que nasceram das discussões dos matemáticos Peano e Hilbert, no final do século XIX, de se construir uma curva contínua e que ocupa todo o espaço de um quadrado unitário.

A construção da curva de Peano também é realizada por processos iterativos. Começa-se por um segmento de reta de comprimento unitário L , o iniciador, divide-se o segmento em três partes iguais e sobre o segmento do terço médio são construídos dois quadrados com lados iguais a $1/3L$, que constituem o gerador. Obtém-se dessa forma, nove segmentos de comprimento de $1/3L$ para a geração k_1 ; para a geração k_2 repete-se o processo da geração k_1 e dessa vez tem-se 81 segmentos de reta com comprimento de $(1/9)L$. Quando

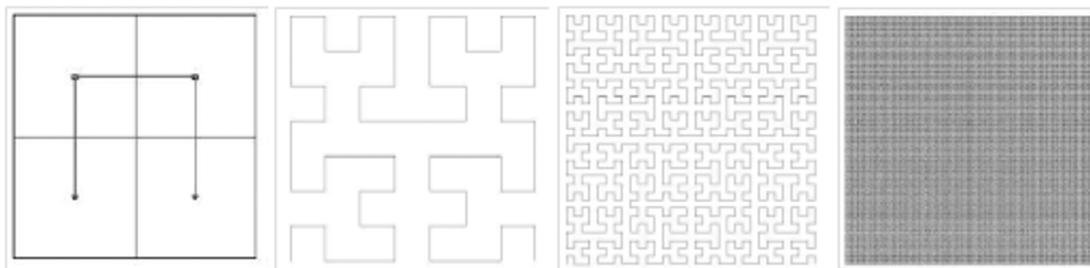


Figura 2.5: Construção da curva de Hilbert e seu gerador. (Fonte: NUNES, 2006).

autossemelhança com a variação de escala, ou seja, ampliando a curva em qualquer grau encontra-se uma nova figura semelhante à original. Já que ocupa todos os pontos da área do quadrado unitário semelhante à da curva de Peano, sua dimensão topológica é igual a 1, sua dimensão euclidiana é igual a 2 e sua dimensão fractal é igual a 2.

2.1.4 Triângulo de Sierpinski

Warsaw Sierpinski descreveu em 1915 uma figura que foi batizada em sua homenagem como triângulo de Sierpinski. Esta figura surpreende a muitos por possuir uma variedade de formas de ser construída por processos iniciador-gerador distintos. O triângulo de Sierpinski parece possuir uma certa universalidade bizarra que aparece em algumas obras matemáticas (WOLFRAM, 2002) ao ser associada com domínios totalmente diversos da sua origem. Além disso, figuras semelhantes ao triângulo de Sierpinski podem ser encontradas na natureza, como, por exemplo, em imagens presentes em conchas marinhas.

Um dos processos de construção do triângulo de Sierpinski consiste na retirada recursiva de triângulos. Parte-se de uma área A delimitada por um triângulo qualquer, iniciador. Seu gerador é formado marcando-se os pontos médios de cada um dos três segmentos que formam o triângulo. Em seguida liga-se este três pontos, obtendo-se quatro triângulos de lado igual à metade do lado do triângulo inicial e área igual à quarta parte da área inicial. Por fim, retira-se o triângulo central, geração k_1 . Na geração k_2 , repete-se o processo e obtém-se uma figura com 9 triângulos de área $(1/16)A$. Repetindo-se sucessivamente os passos anteriores para $k_n \rightarrow \infty$, obtém-se:

$$\begin{aligned} N &= 3^n \\ \delta &= \left(\frac{3}{4}\right)^n A \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde N é o número de triângulos e δ é a área total do triângulo. A Figura 2.6 ilustra o processo de construção do triângulo de Sierpinski.

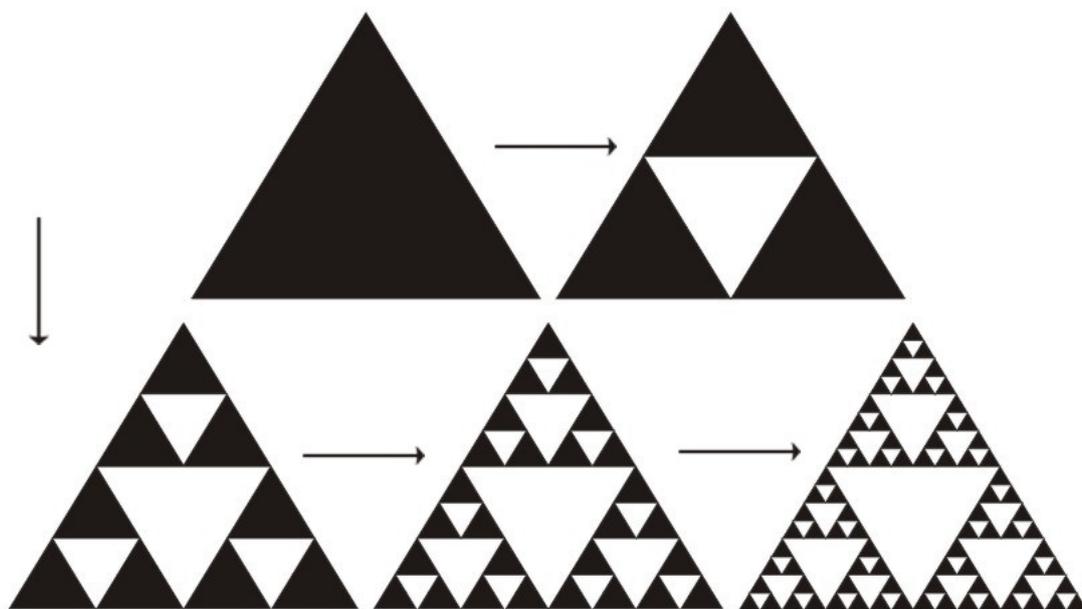


Figura 2.6: As cinco primeiras gerações do triângulo de Sierpinski. (Fonte: autor.)

2.2 Características de um fractal

Conforme Mandelbrot (1977) “um fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch estritamente excede a dimensão topológica”. Para a compreensão detalhada desta definição seria necessário explorar diversos conceitos de topologia, especialmente relacionados aos espaços métricos, o que foge dos objetivos deste trabalho. Assim, esta seção tratará de forma qualitativa as propriedades que caracterizam um fractal.

Modelos de fractais podem ser obtidos através de iterações matemáticas com regras simples, como os monstros matemáticos vistos anteriormente, ou a partir de gráficos de soluções de sistemas não lineares por processos iterativos envolvendo números complexos. Há também objetos com características fractais encontrados na natureza. Apesar da enorme variedade de formas e figuras que são catalogadas como fractais, é possível evidenciar características essenciais que estão presentes em todos os fractais. Essas características são: autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal.

2.2.1 Autossemelhança

A primeira característica que é percebida ao observar-se um fractal é a autossemelhança 2.7, ou seja, partes da figura se assemelham ao todo, algo que mesmo um leigo no assunto pode notar, já que a pura observação visual é suficiente para perceber esta característica não havendo a necessidade de uma expressão matemática para sua percepção. No entanto, ao olharmos para algumas figuras fractais essa característica não é tão evidente, porque a autossemelhança exata, em que o fractal é idêntico independente da escala, ocorre apenas em sistemas de funções iterativas, como nos monstros matemáticos. Os fractais gerados por alguns processos computacionais apresentam uma quase autossimilaridade, em que o fractal apresenta uma réplica aproximada em diferentes escalas. Já os fractais encontrados no mundo real apresentam uma autossemelhança estatística, onde medidas numéricas ou estatísticas é que são preservadas independentemente da escala.

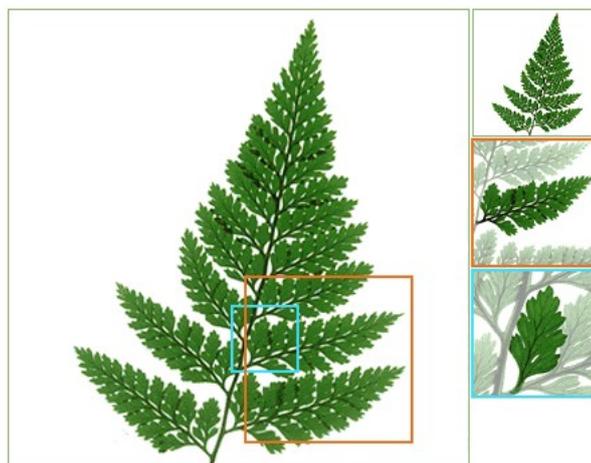


Figura 2.7: Cada parte da figura apresenta semelhança com a figura toda. (Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt.>)

2.2.2 Dimensão

As noções intuitivas de dimensão são ligadas às noções da geometria euclidiana, na qual percebemos um objeto através de seu comprimento, largura e altura. Dessa forma, o ponto tem dimensão igual a 0, a linha tem dimensão igual a 1, o plano tem dimensão igual a 2 e um sólido tem dimensão igual a 3. A dimensão euclidiana está associada também aos eixos de coordenadas e de quantas coordenadas são necessárias para descrever o objeto.

Apesar das noções intuitivas continuarem as mesmas, as idéias e definições de dimensões evoluíram com o tempo. A partir do final do século XIX, com o surgimento e desenvolvimento da topologia, é construído um novo conceito de dimensão. A dimensão deixa de ser uma característica do espaço no qual o objeto está inserido e passa a ser uma

propriedade intrínseca ao objeto, que continua constante independentemente de quantas transformações o objeto sofra.

Na topologia, podemos definir a dimensão de um objeto como sendo a dimensão do objeto que torna um segundo objeto descontínuo mais 1. Para uma melhor compreensão faremos uma análise do ponto, da reta, do plano e do sólido. Por definição o ponto têm dimensão topológica igual a 0, uma reta torna-se descontínua por um ponto, ou seja, um ponto divide uma reta em duas semirretas, e como o ponto têm dimensão zero, temos para a reta dimensão igual a 1, $D_t = 0 + 1$. Para o plano, ele torna-se descontínuo por uma reta, então sua dimensão topológica é 2, $D_t = 1 + 1$. No caso de um sólido, ele é dividido por um plano tendo dimensão topológica 3 ($D_t = 2 + 1$).

Um outro conceito para dimensão topológica parte da dimensão topológica de cobertura (ADDISON, 1997), que está associada à capacidade que um objeto tem em ser coberto por discos de pequenos raios que permitam o menor número de interseções possível, ou seja, um objeto pode ser coberto por “bolas” de raio suficientemente pequenos, mas que permitam cruzamentos entre elas de tal forma o número de “bolas” N_b que se cruzam é $D_t + 1$. Desta forma, um conjunto de pontos pode ser coberto por discos de raio cada vez menor, de forma que cada disco recubra apenas um ponto não havendo interseção entre eles, assim o ponto possui dimensão topológica igual a zero (ver Figura 2.8). De forma similar, uma linha pode ser coberta por discos, de forma o menor número de contatos entre os discos é 2, desta forma, a dimensão topológica é definida como $2 = D_t + 1$, onde D_t é a dimensão topológica. A mesma análise é feita para o plano e o sólido o que resultará respectivamente $3 = D_t + 1$ para o plano e $4 = D_t + 1$ para o sólido. A Figura 2.9 ilustra a cobertura de uma linha e um plano.

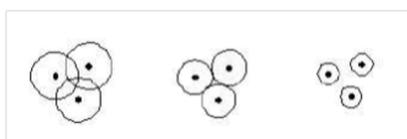


Figura 2.8: Cobertura de um conjunto de pontos por discos. (Fonte: Addison, 1997.)



Figura 2.9: Cobertura de uma linha e um plano por discos. (Fonte: Addison, 1997.)

A topologia apenas inicia os debates sobre dimensão, mas não dá conta das propriedades dos monstros matemáticos. No entanto, outros conceitos de dimensão foram introduzidos de forma a abranger todas as construções matemáticas por processos recursivos. Uma dimensão importante para compreender os fractais é a dimensão de similaridade.

O conceito de dimensão de similaridade está intimamente ligado ao conceito de escala. Uma linha, um quadrado ou um cubo podem ser divididos em N objetos similares de menor escala com comprimento ou aresta ε , como mostra a Figura 2.10. Seu comprimento L , área A ou volume V unitários são dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} L &= N\varepsilon \\ A &= N\varepsilon^2 \\ V &= N\varepsilon^3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

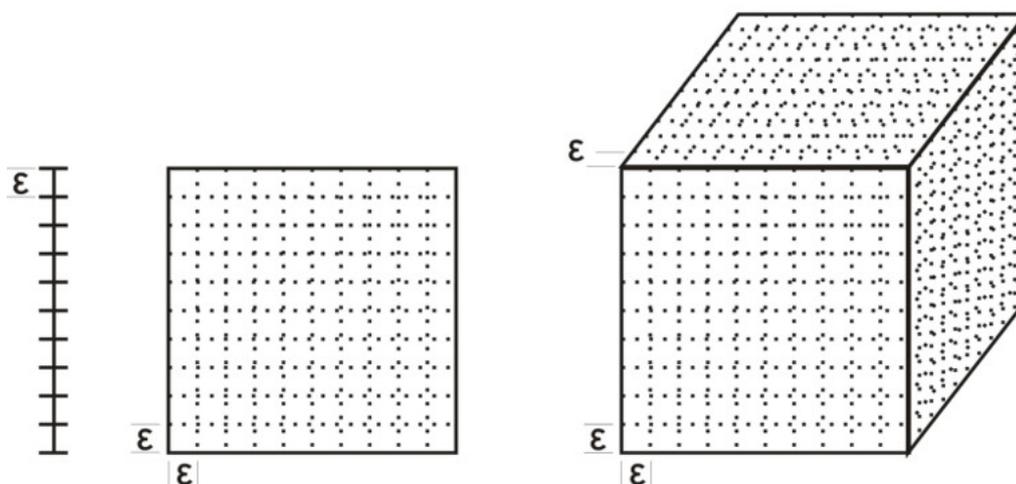


Figura 2.10: Linha, quadrado e cubo divididos em elementos autossimilares. (Fonte: autor)

Como o comprimento, área e volume são unitários, as três equações anteriores podem ser substituídas por:

$$N\varepsilon^{D_s} = 1 \quad (2.7)$$

onde D_s é a dimensão do objeto. A partir da equação 2.7 podemos, finalmente, chegar a uma expressão para a dimensão fractal, aplicando o logaritmo neperiano em ambos os lados da equação temos:

$$D_s = \frac{\ln(N)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (2.8)$$

Finalmente, a partir da equação 2.8 podemos determinar os valores das dimensões dos monstros matemáticos. Para o conjunto de Cantor, temos que para cada geração k_n , N é dado por $N = 2^n$ e $\varepsilon = (1/3)^n$, desta forma, temos:

Tabela 2.1: Valores da dimensão de similaridade de alguns monstros matemáticos.

Curva	D_s
Cantor	0,6309
Curva de Koch	1,2618
Floco de Neve de Koch	1,2618
Triângulo de Sierpinski	1,5849
Curva de Peano	2
Curva de Hilbert	2

$$D_s = \ln(2)/\ln(1/1/3) = 0,6309$$

que é um valor não inteiro.

A Tabela 2.1 apresenta os valores de dimensão de similaridade, repetindo o processo anterior para a curva e floco de neve de Koch, triângulo de Sierpinski, curva de Peano e curva de Hilbert.

A dimensão de similaridade é muito útil quando se trata de fractais exatos (gerados por processos matemáticos recursivos). Para fractais que não são regradados por métodos matemáticos recursivos e os com autossimilaridade estatística é necessário uma nova definição de dimensão. Nesse sentido, a dimensão de BoxCounting (que será definida a seguir), além de amplamente conhecida, é extremamente útil na determinação da dimensão fractal dos fractais não exatos.

A dimensão de BoxCounting está baseada na ideia de quantos elementos de sondagem ou de quadrados de lado δ são necessários para cobrir um objeto. O número de caixas necessário para cobrir um objeto está ligado ao valor de δ , de tal forma que quanto menor δ , maior o número de caixas necessárias para cobri-lo. Quando se fala em caixa a ideia que vem à cabeça é a de um cubo, mas não necessariamente o elemento de sondagem deve ser um cubo, pode ser um segmento de reta, um quadrado, um cubo ou um hipercubo com dimensão euclidiana maior que 3. O principal é que o elemento de sondagem tenha dimensão igual ou superior a dimensão euclidiana do objeto sondado. Desta forma, a fim de generalizar e ajudar na discussão que se segue, nomear-se-á o elemento de sondagem por hipercubo de N-dimensões e o objeto de sondagem de hipervolume N-dimensional.

Para determinar a dimensão via BoxCounting deve-se recobrir o hipervolume com hipercubos de lado δ , como ilustra a Figura 2.11, e contar quantos hipercubos foram necessários, desta forma. O hipervolume é dado por:

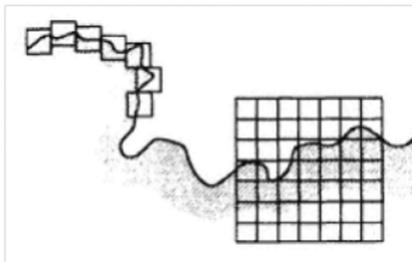


Figura 2.11: Método de determinação da dimensão de BoxCounting. (Fonte: Addison, 1997.)

$$V = N\delta^{D_b} \quad (2.9)$$

onde D_b é a dimensão de BoxCounting.

Aplicando-se o logaritmo a ambos os lados da equação 2.9, chega-se a uma expressão geral para a dimensão:

$$D_b = \frac{\log(N) - \log(V)}{\log(\frac{1}{\delta})} \quad (2.10)$$

Reescrevendo-se a equação 2.10, tem-se

$$\log(N) = D_b \log\left(\frac{1}{\delta}\right) + \log(V) \quad (2.11)$$

que é a equação de uma reta de coeficiente linear $\log(V)$ e coeficiente angular D_b . Desta forma, a dimensão de BoxCounting é o coeficiente angular da reta, ou seja, a dimensão de BoxCounting pode ser determinada a partir do gráfico de $\log(N)$ versus $\log(1/\delta)$ para diversos objetos fractais.

Apesar da dimensão de BoxCounting ser de fácil uso e representar bem a dimensão fractal, devemos definir a dimensão de Hausdorff uma vez que “um fractal é por definição um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch estritamente excede a dimensão topológica”. (Mandelbrot, 1977). No entanto, uma definição formal da dimensão de Hausdorff requer um formalismo matemático que foge aos objetivos deste trabalho. Então, a dimensão de Hausdorff será tratada de forma qualitativa, para tanto este texto está baseado na abordagem dada por Addison(1997).

As dimensões de BoxCounting e de Hausdorff são semelhantes em muitos aspectos, principalmente no sentido de que ambas usam elementos que cobrem o objeto fractal para sondagem. A diferença entre ambas está no fato de que na dimensão de BoxCounting o interesse está no número de elementos usados para cobrir o objeto, enquanto que para Hausdorff o que interessa é o tamanho do elemento de cobertura e para tal é necessário usar o dimensionamento adequado, como será explicado a seguir.

Consideremos uma curva regular não fractal. Para medi-la corretamente deve-se usar uma medida adequada à sua dimensão, neste caso o comprimento é o que melhor define uma reta, a área para uma superfície e o volume para um sólido. De volta ao caso da curva, anteriormente citada, pode-se tentar medi-la usando elementos como segmentos de reta, quadrados ou cubos de tamanho linear δ e respectivas dimensões δ^1 , δ^2 e δ^3 , como mostra a Figura 2.12.

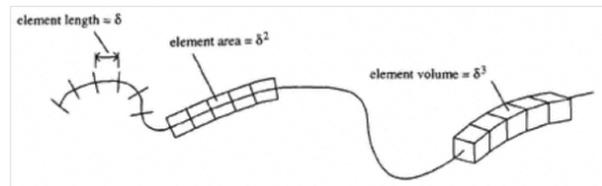


Figura 2.12: Diferentes elementos de sondagem de comprimento linear δ cobrem a curva. (Fonte: Addison, 1997.)

Para medir a curva são necessários N elementos de tamanho δ cada vez menor para cobrir totalmente a curva, fazendo com que o valor de seu comprimento chegue ao valor verdadeiro. O comprimento dado através dos elementos de sondagem é dado por:

$$L_m = N\delta_1 \quad (2.12)$$

onde L_m é o comprimento medido. Quando δ tende a zero o comprimento medido tende ao "valor verdadeiro"

$$L_{m(\delta \rightarrow 0)} \rightarrow L \quad (2.13)$$

Agora, considere a medida do comprimento realizada pelo elemento de sondagem quadrado, que por suas características fornece medidas de área. Desta forma, quando δ tende a zero a área tende a zero, como pode ser vista pela expressão abaixo:

$$\begin{aligned} A_m &= N\delta^2 \\ A_{m(\delta \rightarrow 0)} &\rightarrow 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

o que é compreensivo, pois a área de uma reta é zero, o mesmo ocorre quando tratamos do volume.

Agora, considerem uma superfície. Pode-se medir seu comprimento, área ou volume por retas, quadrados ou cubos respectivamente. Como visto para o caso da curva, ao tentar medir o volume da superfície este será igual a zero. E quanto a seu comprimento? Não é possível cobrir uma área com um número finito de linhas, por isto, o comprimento de uma superfície é infinito.

Como foi visto, para a dimensão de Hausdorff, só é possível medir um objeto com sondas de mesma dimensão do objeto: se for usado um elemento de dimensão superior, seu valor tende a zero, para elementos de dimensão menor seu valor tende a infinito.

Foram tratados até aqui objetos não-fractais, mas o que ocorre quando analisa-se a dimensão de Hausdorff de objetos fractais? Como exemplo, utilizar-se-á a curva de Koch. Se sua medida for feita por meio de elementos de linha têm-se que seu comprimento vai ao infinito, logo a dimensão de Hausdorff é maior do que 1. Por outro lado, se o elemento de sondagem for um quadrado sua área é zero, que dá uma dimensão de Hausdorff inferior a 2. Do exposto conclui-se que a dimensão de Hausdorff para a curva de Koch é maior do que 1 e menor do que 2, ou seja é uma dimensão fracionária que neste caso tem valor igual ao valor da dimensão de similaridade de 1,2618. Mas, na prática, não é possível ter objetos de sondagem com dimensão igual ao objeto sondado, o que torna a utilização da dimensão de Hausdorff inviável para objetos fractais reais.

No entanto, uma outra definição de dimensão pode ser usada para a determinação da dimensão de objetos fractais reais, a dimensão de massa-volume se torna mais adequada para medidas de objetos reais uma vez que suas relações são tiradas de quantidades físicas mensuráveis.

Em um dos trabalhos pioneiros nessa área, Gomes ([GOMES, 1987](#)) realizou um conjunto de 89 experimentos com bolas de papel amassado a fim de determinar suas dimensões. É possível aproximar uma folha de papel a um plano cuja dimensão topológica é igual a 2; pelo processo de amassamento, o novo objeto passa a ocupar o espaço tridimensional sendo necessário três coordenadas para localizar todos os pontos do objeto. Como a transformação de um objeto bidimensional, apenas por homeomorfismo ³, em objetos

³Homeomorfismo é uma função $f: A \rightarrow B$, onde A e B são dois espaços topológicos quaisquer, de maneira que f seja contínua, bijetiva e sua inversa também é contínua.

tridimensionais é inviável, a bola de papel amassado deve possuir dimensão fractal entre 2 e 3.

As definições para dimensão fractal apresentados até então não davam conta da determinação do valor da dimensão das bolas de papel. Na tentativa de resolver o problema para a dimensão de bolas de papel, Gomes enunciou uma nova relação para a dimensão fractal que envolve as grandezas físicas das medidas de massas e tamanhos. A partir dos conceitos envolvendo a relação massa-tamanho para a geometria esférica ele chegou à relação $2R_i = K_j M_i^{(1/D_j)}$ onde $2R$ é o diâmetro das bolas (tamanho), M a massa e D_j a dimensão fractal. Para bolas de papel D_j é de $2,51 \pm 0,19$. Desta forma tornou-se possível determinar dimensões fractais de objetos reais por medidas físicas e não apenas por relações geométricas ou pelo método de boxCounting que requer imagens digitalizadas de preferência, o que nem sempre é possível.

2.3 Empacotamento

Como se pode inserir n objetos dentro de uma cavidade de forma a aproveitar todo o espaço disponível? Esta é a pergunta que muitos cientistas fazem, desde 1611 quando Johannes Kepler estudou e definiu pela primeira vez que esferas rígidas podem ocupar no máximo 74% do espaço e apenas quando estão ordenadas em forma cúbica de face centrada (FCC) (ASTE; WEAIRE, 2000), definição que só recentemente foi provada (DONEV; AL., 2004). O problema de empacotamento é de tão grande interesse que foi apresentado como o Problema 18 da lista de problemas que norteariam a pesquisa em matemática do Século XX, proposta por Hilbert em 1900.

Apesar do problema de empacotamento ser relativamente antigo, continua sendo um tema atual (ASTE; WEAIRE, 2000). Estudo de empacotamento tem sido aplicado, por exemplo, em pesquisa de produção cerâmica (SILVA; A.M.SEGADÃES; DEVEZAS, 2004), concreto de alto desempenho (HERRMAN; BARAM; WACKENHUT, 2006), simulações de moléculas de polímeros (ZOU; LING-NAN; AL., 2006) entre outras aplicações.

As propriedades de maior interesse nos problemas de empacotamento são o número de contatos entre os objetos e a fração de empacotamento f . Esta última é definida como a razão entre o volume dos objetos que ocupam um determinado espaço pelo o espaço total ocupado.

$$f = \frac{\text{espaço preechido}}{\text{espaço total}} \quad (2.15)$$

O número de contatos e a fração de empacotamento estão diretamente relacionados à densidade dos objetos, o que torna o problema de empacotamento de grande interesse para a física da matéria condensada, pois (além da densidade) estas propriedades estão relacionadas às configurações das redes cristalinas. Na física da matéria condensada os átomos que formam as redes cristalinas são modelados como discos para os casos de redes bidimensionais ou esferas rígidas para redes tridimensionais. Nesse trabalho o foco será para configurações tridimensionais. Dessa forma, podemos comparar suas estruturas àsquelas encontradas nos estudos realizados para empacotamento de esferas rígidas. Nas estruturas cristalinas tridimensionais há dois tipos de rede que apresentam um máximo empacotamento: a rede cúbica de face centrada (fcc) e a rede hexagonal (hcp) (AMOREIRA; JESUS, 2012). A Figura 2.13 mostra a configuração para esferas rígidas em rede cúbica de face centrada e rede hexagonal.

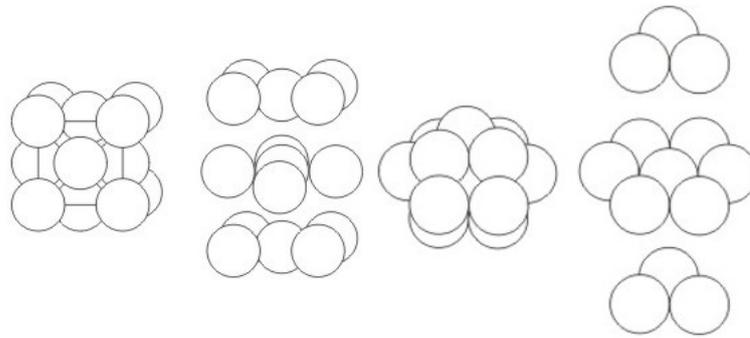


Figura 2.13: Arranjo de esferas rígidas para rede hexagonal e cúbica de face centrada. (Fonte: autor)

Não são apenas os cristais que são modelados por esferas rígidas. O modelo mais simples para fluidos é composto por um sistema de esferas rígidas e impenetráveis, cujo comportamento depende da fração de empacotamento (STARIOLO, 2012). É possível verificar também que sólidos amorfos, como o vidro, podem ser modelados por empacotamento de esferas rígidas aleatórias, com fração de empacotamento $f = 0,64$.

Apesar de sólidos amórficos serem bem representados por empacotamento de esferas rígidas aleatórias, são necessários alguns cuidados durante os procedimentos experimentais, para não produzir falsos resultados. Alguns fatores como lubrificantes e agitação mecânica, ajudam na obtenção de empacotamentos mais densos (ASTE; WEAIRE, 2000). O atrito entre os objetos que estão sendo empacotados dificulta o “escoamento”, impedindo que eles se movam livremente para ocupar todos os espaços possíveis. O uso de lubrificantes diminui o atrito, permitindo uma melhor compactação. Apesar de o lubrificante diminuir o atrito entre os objetos do empacotamento, a forma como os objetos se aglomeram pode formar arranjos onde espaços possíveis não são ocupados. Por outro lado, a agitação mecânica força o desarranjo dos aglomerados fazendo que o empacotamento seja o mais denso possível. Tornando este fator predominante na obtenção de

empacotamentos mais densos para arranjos aleatórios. Isso pode ser observado na fração de empacotamento aleatório para esferas: obtém-se $f = 0,60$, sem agitação mecânica, e $f = 0,64$, com agitação mecânica (SCOTT; KILGOUR, 1969).

Outro fator relevante para a fração de empacotamento é a razão entre o tamanho da cavidade que contém os objetos empacotados e o tamanho dos objetos empacotados, reflexo da sensibilidade do arranjo às condições de fronteiras. Quando o tamanho dos objetos é da ordem de grandeza do tamanho da cavidade há uma ocupação irregular que induz a medidas irreais da fração de empacotamento. Para melhor compreender essa afirmação, pense em uma régua que tem a mesma escala que o objeto que se irá medir. Qualquer medida deste objeto por esta régua terá um erro associado de 50% do seu tamanho, o que torna esta medida não confiável. Desta forma, quanto menor a escala da régua mais confiável será a medida realizada. Algo semelhante pode se estender para as medidas de empacotamento. Em uma caixa de aresta de mesmo tamanho do diâmetro da bola cabe apenas uma bola; se a aresta dessa caixa é aumentada em 50%, continuará a caber apenas uma bola. Desta forma, a relação matemática usada para encontrar o valor da fração de empacotamento não representará a fração de empacotamento das bolas.

A forma do objeto também interfere nos valores da fração de empacotamento. Durante muitos anos os estudos de empacotamento estiveram centrados em discos e esferas rígidas; no entanto, novas geometrias têm sido estudadas. No trabalho desenvolvido por Donev *et al.* (DONEV; AL., 2004), foram utilizados elipsoides no lugar de esferas rígidas perfeitas, encontrando fração de empacotamento $f = 0,735$ para arranjos aleatórios e $f = 0,770732$ para redes cristalinas cúbica de face centrada. Esses estudos mostraram que o empacotamento de elipsoides possui maior densidade que os encontrados para esferas rígidas, o que foi associado ao maior grau de liberdade de orientação que o elipsoide possui. Apesar do modelo elaborado por Donev, *et al.* encontrar empacotamentos mais densos e ter boa previsibilidade, pouco se pode afirmar sobre empacotamento de partículas não esféricas (ASTE; WEAIRE, 2000).

Até o momento, todas as referências são feitas para objetos de mesmos tamanho. No entanto, os modelos propostos para empacotamento não são feitos apenas com objetos do mesmo tamanho. Alguns estudiosos como Furnas e Andreassen (SILVA; A.M.SEGADÃES; DEVEZAS, 2004) propuseram modelos em que os tamanhos dos objetos são diferentes, que permitem obter densidades maiores, uma vez que objetos menores podem ocupar os espaços vazios (intersticiais) entre os objetos maiores. A maioria dos objetos utilizados neste trabalho possuem tamanhos semelhantes, mas, inspirados por esses modelos, testamos a metodologia para empacotamento de esferas de tamanhos diferentes.

Os estudos realizados sobre empacotamento, em sua maioria, têm seus esforços centrados na determinação da maior densidade de empacotamento possível, sendo o ideal uma

fração de empacotamento $f = 1$, o que é impossível de se obter em termos práticos. No entanto, um modelo teórico para um empacotamento “perfeito” pode ser imaginado desde 200 AC por Apolônio de Perca (ASTE; WEARE, 2000) (BORKOVEC; PARIS; PEIKERT, 1994) (JR.; AL., 2005). Este estudo foi esquecido e reapareceu em uma carta de G W Leibniz (1646-1716) (ASTE; WEARE, 2000), onde se descreve um método recursivo no qual são inscritos três círculos congruentes uns com os outros com raio máximo dentro de uma circunferência, procedendo-se de forma semelhante nos espaços vazios entre eles, repetindo-se esse processo até o infinito. (ver Figura 2.14)

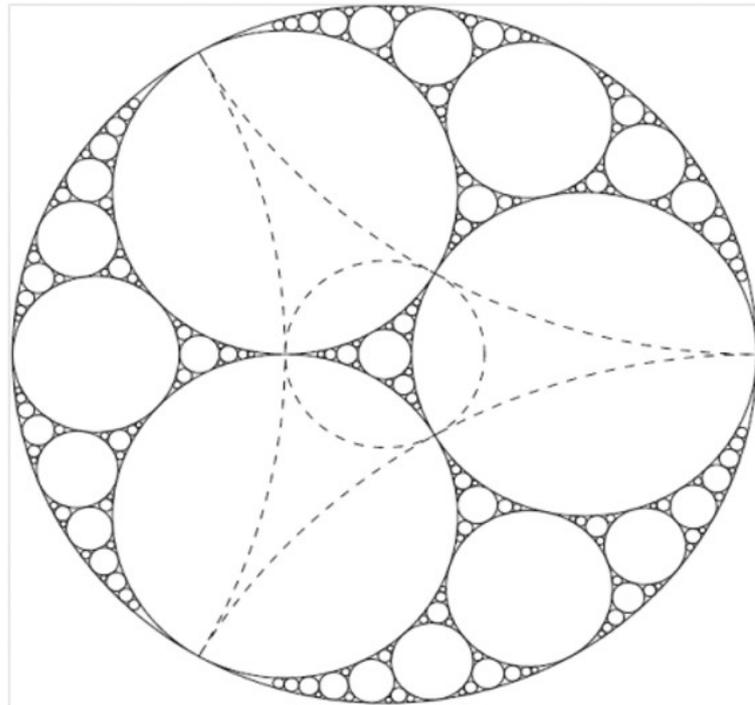


Figura 2.14: Empacotamento de Apolônio em 2-dimensões. (Fonte: Aste, 2000)

O método de empacotamento de Apolônio é semelhante ao da construção do tapete de Sierpinski o que leva a indagar sobre sua dimensão, que vale 1,305 para duas dimensões e 2,474 para três dimensões (ASTE; WEARE, 2000) (BORKOVEC; PARIS; PEIKERT, 1994). O empacotamento de Apolônio para infinitas iterações ocupa todo o espaço possível resultando numa fração de empacotamento igual a 1.

As questões sobre empacotamento continuam a ser tema de investigações, principalmente pelas suas aplicações tecnológicas. No entanto, como, em termos práticos, poucos objetos podem ser aproximados a esferas, novas formas geométricas devem estar no foco destes estudos nos próximos anos.

Trabalho experimental e desenvolvimento da pesquisa

Os estudos de aglomerados têm despertado muito interesse nos últimos anos. Novas estruturas encontram-se no foco das investigações. No entanto, apenas o caráter do empacotamento vem sendo investigado. Neste trabalho, além do empacotamento, investigamos também a dimensão de aglomerados de estruturas rugosas. Esses estudos foram feitos por meio de simulação analógica, com o uso de bolas de papel amassado. Primeiramente, definimos o tipo de papel a ser utilizado, papel A4 da marca REPORT[®]¹ MultiUso de densidade de 75g/m^2 , do qual separamos 1500 folhas para nossos experimentos. Utilizando software gráfico desenhamos áreas quadradas de lados iguais a 8cm, 9cm, 10cm, 11cm, 12cm, 13cm, 14cm, 15cm, 16cm e 17cm. Essas figuras foram impressas nas folhas de papel A4, como mostrado na Figura 3.1. Os quadrados foram cortados com o auxílio de uma guilhotina garantindo uma padronagem em seus cortes. Como as medidas de massa possuíam maior precisão que as medidas dos lados de quadrado, e supondo que a densidade do papel uniforme, optou-se por calcular seu desvio padrão a partir das medidas de massa, chegando-se ao valor de 0,021g. O número de bolas produzidas segue na Tabela 3.1.

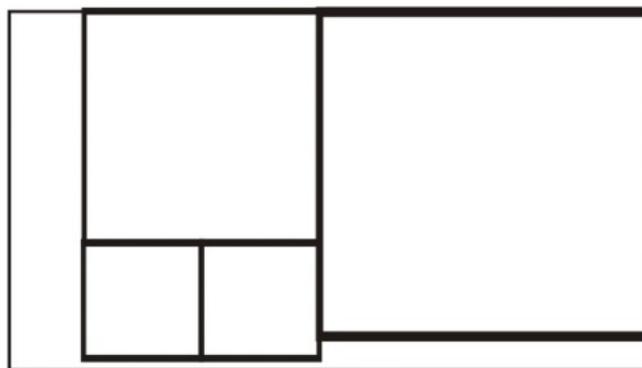


Figura 3.1: Folha de papel A4 impressa com quadrados de diferentes tamanhos.

Cada recorte de papel foi amassado manualmente pela mesma pessoa. Apesar de não ser possível garantir o mesmo processo para o amassamento de todas as “bolinhas”, buscou-se garantir que todas atingissem o máximo grau de compactação (isto é, amassado o mais apertado possível). A Figura 3.2 apresenta a fotografia de bolas de papel amassado para diferentes tamanhos. A partir desse ponto, quando nos referirmos ao tamanho da bola de papel estaremos nos referindo ao tamanho do quadrado do papel que deu origem à bola, (bolinhas de tamanho $08 \times 08\text{cm}^2$, $09 \times 09\text{cm}^2$, $10 \times 10\text{cm}^2$, $11 \times 11\text{cm}^2$, $12 \times 12\text{cm}^2$, $13 \times 13\text{cm}^2$, $14 \times 14\text{cm}^2$, $15 \times 15\text{cm}^2$, $16 \times 16\text{cm}^2$ e $17 \times 17\text{cm}^2$).

¹Marca registrada.

Tabela 3.1: Tabela do número de quadrados produzidos para cada aresta.

Tamanho da aresta quadrado originário da bola(cm)	Número de quadrados produzidos
08	800
09	700
10	550
11	500
12	450
13	350
14	300
15	250
16	200
17	150

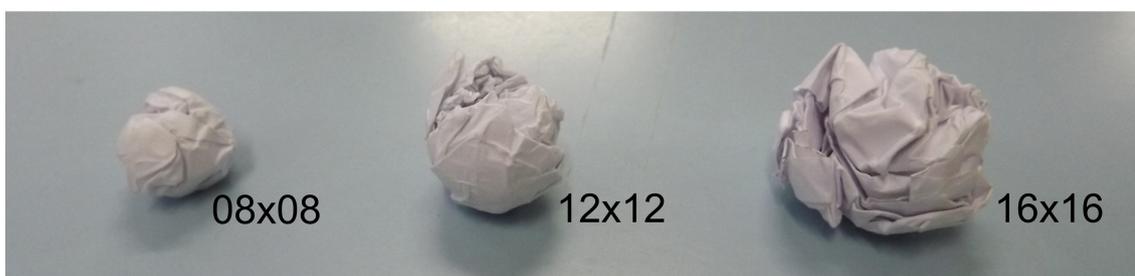


Figura 3.2: Bolas de papel com diferentes tamanhos.

Apesar da densidade superficial do papel ser conhecida, as bolinhas são novas estruturas que não estão totalmente preenchidas por papel. Assim, cada tamanho de bola apresentava sua própria densidade. Para determinar suas densidades foram medidos os diâmetros e massas de 50 bolinhas para cada tamanho. As medidas de diâmetro foram realizadas com paquímetro digital da marca *Insize* (code 1112-150) número serial 3009100753, com resolução de 0,01mm, tomando-se o cuidado de não deformar a bolinha quando o paquímetro era fechado. Para cada bola foram feitas 10 leituras de diâmetro. De posse dos valores dos diâmetros, o volume médio de cada bolinha foi determinado por:

$$V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^{2,51} \quad (3.1)$$

onde D é o diâmetro médio de cada bolinha e o expoente 2,51 é o valor da dimensão da bola de papel amassada (GOMES, 1987).

As medidas das massas das bolinhas foram realizadas na balança digital de marca BEL Engineering, modelo Mark 500, com capacidade máxima de 500g, e erro associado de 0,01g. A Tabela 3.2 apresenta as diferentes densidades para cada tamanho de bola de papel.

Tabela 3.2: Tabela do tamanho dos quadrados que originaram as bolas de papel e suas respectivas densidades.

Tamanho do quadrado originário da bola(cm^2)	Densidade ($g/cm^{2,51}$)
08x08	0,24707
09x09	0,25105
10x10	0,25886
11x11	0,24258
12x12	0,25679
13x13	0,27037
14x14	0,23795
15x15	0,24577
16x16	0,22119
17x17	0,22011

Após a caracterização das bolas de papel, passamos às medidas para o problema de aglomerados. Como o objetivo é avaliar o comportamento de diferentes tamanhos de aglomerados para diferentes tamanhos de bolinhas, passamos à confecção de cavidades de diferentes Volumes. As cavidades cúbicas foram feitas com papel Paraná (100g) para tamanhos de arestas de 4cm, 5cm, 6cm, 7cm, 8cm, 9cm, 10cm, 11cm, 12cm e 13cm. A ilustração apresentada na Figura 3.3 representa as cavidades usadas.

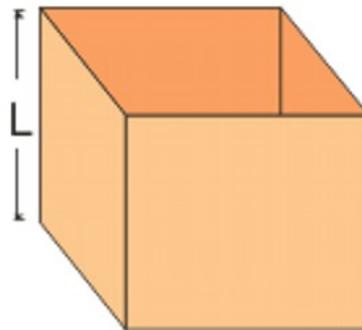


Figura 3.3: Cavidade cúbica de aresta L.

A medida consiste de encher a cavidade com bolas de papel, medir a massa e contar quantas bolas couberam na cavidade. Para cada tamanho de bola foram feitas 50 medidas por cavidade.

3.1 Modelo proposto

Em seu livro Fractais, Feder (1988) definiu a dimensão de aglomerados. Segundo esse autor, podemos preencher um segmento de reta de comprimento L por discos de mesmo diâmetro D , centrados no segmento de reta, colocando-os um após o outro, de forma que

cada par se toque em apenas um ponto. Dessa forma, o número N de discos necessários para cobrir todo o comprimento L é dado por.

$$ND = L \quad (3.2)$$

O número de discos desse conjunto pode ser encontrado dividindo-se a Eq. 3.2 pelo diâmetro do disco, ou seja:

$$N = \left(\frac{L}{D}\right)^1.$$

Analogamente, podemos encontrar o número de discos que cobrem uma área A , ver Figura 3.4,

$$N \sim \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

ou o número de esferas em um volume V ,

$$N \sim \left(\frac{L}{D}\right)^3$$

Generalizando, podemos encontrar o número de monômeros que recobrem qualquer hipercubo pela equação abaixo:

$$N \sim \left(\frac{L}{D}\right)^d \quad (3.3)$$

A Eq. 3.2 é concebida tomando-se como base que todo o comprimento L será preenchido pelos discos. No entanto, uma área ou mesmo um volume não pode ser totalmente preenchido por monômeros, restando-lhe espaços vazios. Deste modo, a Eq. 3.3 N deve representar o número máximo de monômeros possíveis na área ou no volume. A dimensão d pode então ser determinada tomando-se o logaritmo em ambos os membros da equação 3.3:

$$\ln N = d \cdot \ln\left(\frac{L}{D}\right) + \ln C \quad (3.4)$$

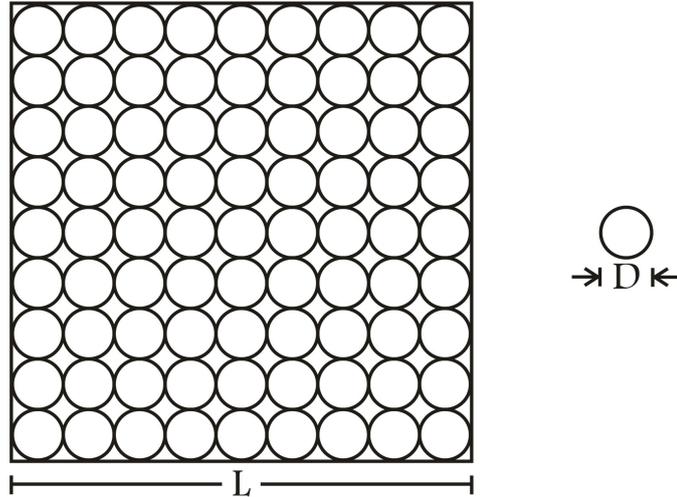


Figura 3.4: Área recoberta por discos de diâmetro D

Desta forma podemos encontrar o valor de d de qualquer estrutura preenchida por monômeros.

3.2 Resultados e Discussão

O estudo de aglomerados é de grande interesse da indústria, para obtenção de concreto, cerâmicas estruturais, metalurgia de pó (SILVA; A.M.SEGADÃES; DEVEZAS, 2004), (HERMAN; BARAM; WACKENHUT, 2006) em casos de empacotamentos densos. A maioria dos estudos sobre empacotamentos são feitos com objetos regulares (vide seção 2.3); no entanto, como muitos objetos naturais possuem dimensão fractal (MANDELBROT, 1977), optou-se por realizar experimentos com bolas de papel amassados, objetos fractais de dimensão 2,51 (GOMES, 1987).

Como descrito no capítulo anterior, os volumes das bolas de papel foram determinados a partir da medida de seus diâmetros. A fim de estimar o valor do volume médio de cada bola com boa precisão, foram realizadas 500 medidas de diâmetro para cada grupo de tamanho, aplicando-se teste de normalidade observou-se que sua distribuição tem comportamento normal, como mostrado na Figura 3.5 para bolas de $08 \times 08 \text{cm}^2$. Assumindo-se a forma geral $f(D) = Ae^{-\frac{(D-\langle D \rangle)^2}{2\sigma^2}}$ os parâmetros para a distribuição são os seguintes:

$$\begin{cases} \langle D \rangle = 1,4943 \pm 0,0032 \\ \sigma = (9,23 \pm 0,32) \times 10^{-2} \\ A = 106,2 \pm 3,2 \end{cases}$$

Os parâmetro para as distribuições para os demais tamanhos investigados estão dispostas

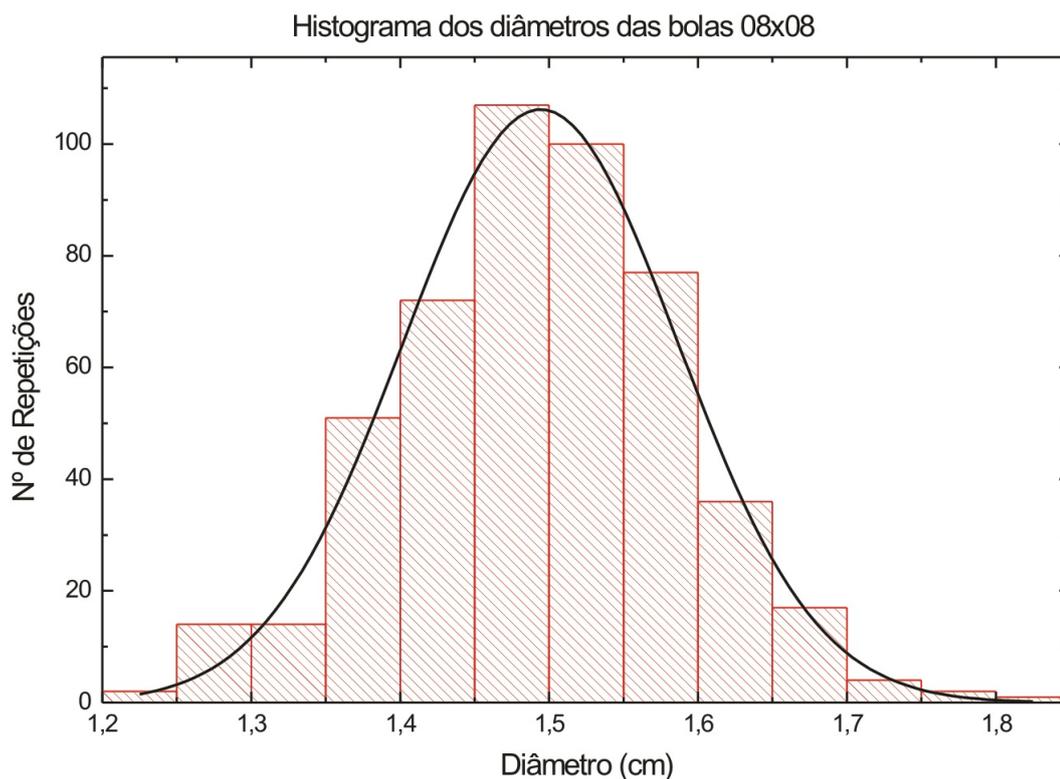


Figura 3.5: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas $08 \times 08 \text{ cm}^2$.

no Apêndice A. A Tabela 3.3 mostra os valores dos diâmetros médios e os respectivos volumes generalizados para diferentes valores de tamanho de bolas.

Obtidos os valores dos volumes médios para cada tamanho de bolinha de papel, passou-se a analisar as frações de empacotamento. Como o sistema é muito sensível às condições de fronteira (representadas pela razão L/D), no limite prático em que trabalhou-se, encontrou-se um valor de fração de empacotamento específico para cada tamanho de bola e de cavidade. Como esperado, quando as bolas têm diâmetro médio tal que L/D é cada vez maior, os efeitos de fronteira são minimizados. Por outro lado, quando L/D se aproxima de 1, os efeitos de fronteira predominam e a metodologia de medida chega ao limite onde as medidas não são confiáveis. Na Tabela 3.4 apresenta-se a razão entre o volume da cavidade e o volume das bolas, e a fração de empacotamento das bolinhas para cada tamanho. Já na Tabela 3.5, a razão é entre a aresta da cavidade e o diâmetro médio da bola. Verificou-se que para as bolas de menor tamanho a fração de empacotamento excede o valor de 0,64 encontrado para esferas rígidas dispostas aleatoriamente (SCOTT; KILGOUR, 1969). No entanto, medidas com bolas de isopor, com diâmetro próximo ao das bolas de papel de 15×15 , mostraram maior fração de empacotamento que as bolas de papel, como pode ser verificado na Tabela 3.6.

Os resultados encontrados para bolas de isopor contradizem a hipótese inicial, de que

Tabela 3.3: Valores para diâmetro e volume dos diferentes tamanhos de bolas.

Tamanho <i>cm</i>	Diâmetro <i>cm</i>	Erro <i>cm</i>	Volume $cm^{2,51}$	Erro $cm^{2,51}$
08x08	1,4911	0,0045	2,0035	0,1128
09x09	1,6254	0,0048	2,4875	0,0998
10x10	1,7409	0,0056	2,9551	0,0815
11x11	1,9205	0,0055	3,7810	0,0397
12x12	2,0336	0,0057	4,3654	0,0336
13x13	2,1222	0,0058	4,8586	0,0641
14x14	2,3679	0,0061	6,3964	0,2093
15x15	2,4717	0,0070	7,1236	0,2911
16x16	2,7213	0,0067	9,0690	0,5336
17x17	2,8494	0,0094	10,1791	0,6897

Tabela 3.4: Valores da razão entre volume das cavidades e das bolas e fração de empacotamento.

Aresta (cm)	08x08		09x09		10x10		11x11		12x12	
	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp
04	31,95	0,56	25,73	0,52	21,66	0,51	16,93	0,49	14,66	0,48
05	62,39	0,57	50,25	0,56	42,30	0,54	33,06	0,52	28,63	0,50
06	107,81	0,60	86,83	0,57	73,09	0,54	57,13	0,56	49,48	0,53
07	171,21	0,64	137,89	0,60	116,07	0,58	90,72	0,61	78,57	0,55
08	255,56	0,64	205,83	0,60	173,26	0,59	135,42	0,62	117,29	0,55
09	363,87	0,64	293,07	0,65	246,69	0,59	192,81	0,63	167,00	0,56
10	499,14	0,66	402,01	0,64	338,40	0,62	264,49	0,63	229,08	0,59
11	664,36	0,69	535,08	0,71	450,41	0,63	352,03	0,66	304,90	0,61
12	862,52	0,69	694,67	0,70	584,75	0,64	457,03	0,66	395,84	0,61
13	1096,61	0,68	883,22	0,69	743,46	0,61	581,07	0,67	503,28	0,62
Aresta (cm)	13x13		14x14		15x15		16x16		17x17	
	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp	Razão	F.Emp
04	13,17	0,45	10,01	0,40	8,98	0,36	7,06	0,28	2,00	0,32
05	25,73	0,49	19,54	0,46	17,55	0,45	13,78	0,44	5,46	0,45
06	44,46	0,54	33,77	0,53	30,32	0,44	23,82	0,49	8,98	0,43
07	70,60	0,56	53,62	0,56	48,15	0,48	37,82	0,54	15,94	0,48
08	105,38	0,57	80,05	0,55	71,87	0,50	56,46	0,54	24,66	0,49
09	150,04	0,59	113,97	0,56	102,34	0,51	80,38	0,54	36,42	0,51
10	205,82	0,58	156,34	0,64	140,38	0,52	110,27	0,53	50,28	0,51
11	273,95	0,59	208,09	0,66	186,85	0,56	146,77	0,59	68,64	0,52
12	355,66	0,58	270,16	0,64	242,58	0,55	190,54	0,57	87,98	0,52
13	452,19	0,57	343,48	0,68	308,41	0,56	242,26	0,57	111,46	0,52

Tabela 3.5: Valores da razão entre aresta e diâmetro das bolas e fração de empacotamento.

Aresta (cm)	08x08		09x09		10x10		11x11		12x12	
	Razão	F.Emp								
04	2,68	0,56	2,46	0,52	2,30	0,51	2,08	0,49	1,97	0,48
05	3,35	0,57	3,08	0,56	2,87	0,54	2,60	0,52	2,46	0,50
06	4,02	0,60	3,69	0,57	3,45	0,54	3,12	0,56	2,95	0,53
07	4,69	0,64	4,31	0,60	4,02	0,58	3,65	0,61	3,44	0,55
08	5,37	0,64	4,92	0,60	4,60	0,59	4,17	0,62	3,93	0,55
09	6,04	0,64	5,54	0,65	5,17	0,59	4,69	0,63	4,43	0,56
10	6,71	0,66	6,15	0,64	5,74	0,62	5,21	0,63	4,92	0,59
11	7,38	0,69	6,77	0,71	6,32	0,63	5,73	0,66	5,41	0,61
12	8,05	0,69	7,38	0,70	6,89	0,64	6,25	0,66	5,90	0,61
13	8,72	0,68	8,00	0,69	7,47	0,61	6,77	0,67	6,39	0,62
Aresta (cm)	13x13		14x14		15x15		16x16		17x17	
	Razão	F.Emp								
04	1,88	0,45	1,69	0,40	1,62	0,36	1,47	0,28	1,40	0,32
05	2,36	0,49	2,11	0,46	2,02	0,45	1,84	0,44	1,75	0,45
06	2,83	0,54	2,53	0,53	2,43	0,44	2,20	0,49	2,11	0,43
07	3,30	0,56	2,96	0,56	2,83	0,48	2,57	0,54	2,46	0,48
08	3,77	0,57	3,38	0,55	3,24	0,50	2,94	0,54	2,81	0,49
09	4,24	0,59	3,80	0,56	3,64	0,51	3,31	0,54	3,16	0,51
10	4,71	0,58	4,22	0,64	4,05	0,52	3,67	0,53	3,51	0,51
11	5,18	0,59	4,65	0,66	4,45	0,56	4,04	0,59	3,86	0,52
12	5,65	0,58	5,07	0,64	4,85	0,55	4,41	0,57	4,21	0,52
13	6,13	0,57	5,49	0,68	5,26	0,56	4,78	0,57	4,56	0,52

Tabela 3.6: Valores de fração de empacotamento para bolas de isopor e bolas de papel de tamanho 15x15.

Aresta (cm)	Bolas de isopor	Bolas de papel
04	0,36	0,36
05	0,46	0,45
06	0,48	0,44
07	0,54	0,48
08	0,56	0,50
09	0,56	0,51
10	0,57	0,52
11	0,59	0,56
12	0,60	0,55
13	0,60	0,56

Tabela 3.7: Valores dos raios para esferas com dimensão 2,51 a partir de esferas de dimensão 3

Raio com dimensão 3 (<i>cm</i>)	Volume das esferas (<i>cm</i> ³)	Raio com dimensão 2,51 (<i>cm</i>)
01	4,189	1,000
02	33,509	2,297
03	113,094	3,737
04	268,075	5,278
05	523,583	6,899
06	904,752	8,586
07	1436,713	10,330
08	2144,597	12,126
09	3053,538	13,967
10	4188,667	15,849

bolas de papel amassado possuem empacotamento mais denso que esferas regulares. Na tentativa de verificar esse resultado, calculou-se quais seriam os raios de esferas com dimensão 2,51 e 3 para as mesmas esferas de volume V . Desta forma, foi possível verificar que bolas de papel com dimensão 2,51 possuem raios maiores que esferas de mesmo tamanho e dimensão 3, como pode ser visto na Tabela 3.7 com dez raios diferentes. Como as bolas de papel de dimensão 2,51 possuem raio maior, ocupam mais espaço que as esferas regulares.

A Figura 3.6 mostra o comportamento da fração de empacotamento das bolas de papel em função do tamanho da aresta. Verificou-se o aumento dos valores de fração de empacotamento em função da aresta da cavidade cúbica. É possível verificar que independentemente do tamanho, as bolas apresentam comportamento semelhante.

Percebeu-se que algumas das configurações (tamanho de bolinha e arestas) apresentam valores de fração de empacotamento semelhantes aos encontrados para as redes de Bravais cúbica simples e de corpo centrado. A rede cúbica simples, cujo valor da fração de empacotamento é de 0,52 foi a que teve um maior destaque aparecendo cinco vezes enquanto a rede cúbica de corpo centrado aparece duas vezes, como podemos ver na Tabela 3.8. Não foi possível fazer esta comparação com as demais redes de Bravais.

Após analisar a fração de empacotamento do aglomerado, passou-se a investigar a sua ocupação do espaço. Como a dimensão (de Hausdorff ou de Capacidade ou Kolmogorov) é uma das propriedades referentes à maneira como um objeto ocupa o espaço, estudou-se a dimensão do aglomerado. Para tanto, foi utilizada a relação massa-tamanho, a fim de determinar o valor da dimensão do aglomerado, uma vez que podemos medir diretamente a massa do aglomerado e a aresta da cavidade cúbica. No modelo massa-tamanho os valores das dimensões são encontrados a partir das Leis de potência do tipo $y = x^n$, onde seus expoentes (n) podem ser medidos diretamente dos valores dispostos em gráficos. Para esta medida construiu-se gráficos do tipo “log-log”, pois a dimensão é dada pelo coeficiente

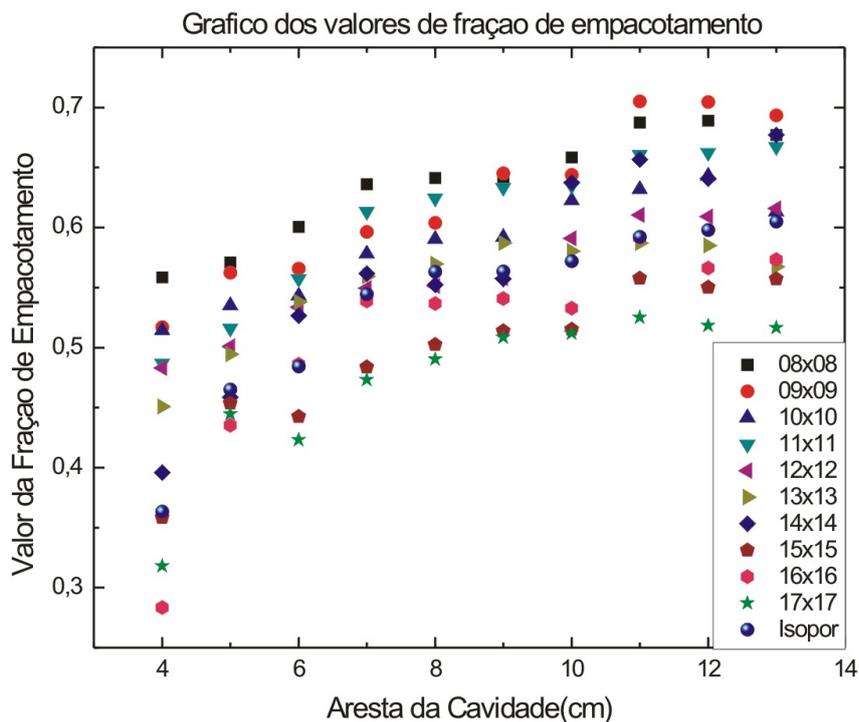


Figura 3.6: Valores da fração de empacotamento em função do tamanho da aresta da cavidade cúbica.

angular da reta. Entretanto, o sistema com o qual trabalhou-se é extremamente sensível às condições de fronteiras, todas as tentativas de se encontrar uma dimensão pelo coeficiente angular do gráfico log-log (massa-tamanho) resultaram em valores maiores que três. Este resultado pode estar relacionado ao fato dos objetos estudados serem irregulares, por isso, investigou-se bolas de isopor que possuem forma regular. No entanto, a dimensão encontrada para bolas de isopor, pela relação massa-tamanho, também excede o valor 3, como pode ser visto na Figura 3.7.

Após reflexão acerca dos resultados das dimensões encontradas a partir da relação massa-tamanho, percebeu-se que normalmente a metodologia empregada nas medidas consiste em cortar ou confeccionar a amostra de forma que ela não esteja contida por fronteiras físicas reais. Como por exemplo, ao usar a metodologia massa-tamanho para obter a dimensão de um coral qualquer. Desse coral são retiradas amostras com tamanhos diferentes (exemplo, cubos de diferentes arestas); para isso o coral é cortado de forma que não há uma barreira real os espaços preenchidos ou não, podem ser divididos de formas diferentes, permanecendo apenas uma pequena fração ou quase sua totalidade. No entanto, quando há uma fronteira física real (caixa) em que objetos são colocados individualmente de forma que se promova uma auto-organização, as condições de auto exclusão não permitem que espaços possíveis de serem ocupados por frações do objeto sejam ocupados (não se pode cortar uma fração do objeto para que ocupe essa porção do espaço), o mesmo

Tabela 3.8: Configurações do sistema que apresentam os mesmos valores para as redes de Bravais cúbica simples e de corpo centrado.

Aresta (cm)	08x08	09x09	10x10	11x11	12x12	13x13	14x14	15x15	16x16	17x17
04		0,52								
05										
06										
07										
08										
09										
10								0,52		
11										0,52
12										0,52
13	0,68						0,68			0,52

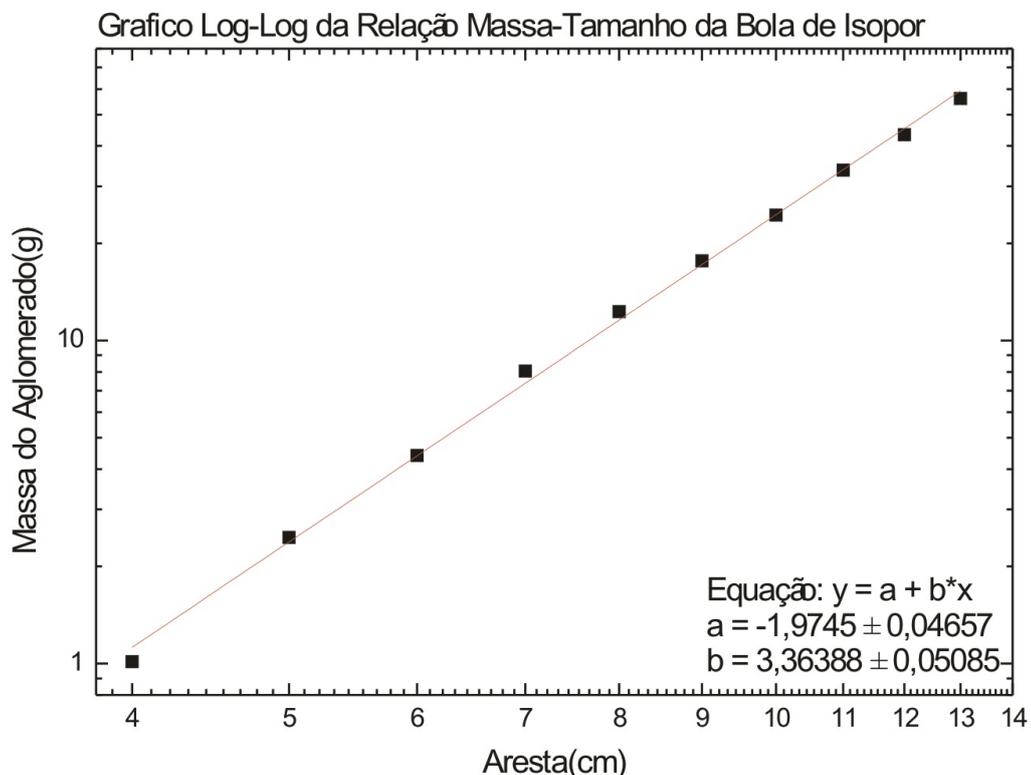


Figura 3.7: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado de bolas de isopor .

raciocínio e válido para os espaços não possíveis de ocupação. A barreira física impõe restrições na forma como o espaço interno será ocupado.

Como a hipótese inicial, de que a relação massa-tamanho daria o valor da dimensão do aglomerado, mostrou-se insatisfatória, passou-se a investigar a dimensão do aglomerado a partir da Eq. 3.4. Desta forma, para cada tamanho de cavidade foram traçados gráficos do número de bolas de papel que preenchiam a cavidade em função de seus diâmetros,

como pode ser visto na Figura 3.8. Como a dimensão do aglomerado pode ser encontrado a partir de uma Lei de potência, os gráficos foram redefinidos em termos dos logaritmos do número de bolas e seus diâmetros, resultando em valores para as dimensões inferiores a 3 (ver Figura 3.9, os demais gráficos seguem no Apêndice B). A Figura 3.10 mostra um gráfico para as quatro maiores cavidade, sendo possível observar a semelhança entre as curvas. As curvas para os menores tamanhos de cavidade, visualmente, assemelhavam-se a uma reta devido à escala do gráfico, e por esse motivo não foram apresentados. No Apêndice B é possível ver uma figura com as curvas para todas as cavidades. A Tabela 3.9 apresenta os valores encontrados para a dimensão dos aglomerados. Como pode ser verificado, apenas a menor cavidade apresenta dimensão maior que 3, apesar das demais cavidades terem valores inferior, as cavidades de arestas 5 e 6 possuem valores muito próximos a 3 de forma que quando comparados a seus erros podem ser considerados como 3. Comparando os resultados encontrados para as dimensões à Tabela 3.9, pode-se observar que as três cavidades de menor tamanho possuem valores de fração de empacotamento menores que 0,60, que pode ser associado com a razão entre os valores das arestas da cavidade e os diâmetros da bolas de papel. A razão (aresta/diâmetro) pode ser associada ao fato de que os efeitos de fronteiras são reduzidos quando essa razão cresce, diminuindo a influência desses efeitos nas medidas. Desta forma, as três menores cavidades maximizam os erros associados às medidas, sendo recomendado trabalhar com cavidade com arestas a partir de 7 cm para os mesmos tamanhos de bolas de papel utilizados neste trabalho.

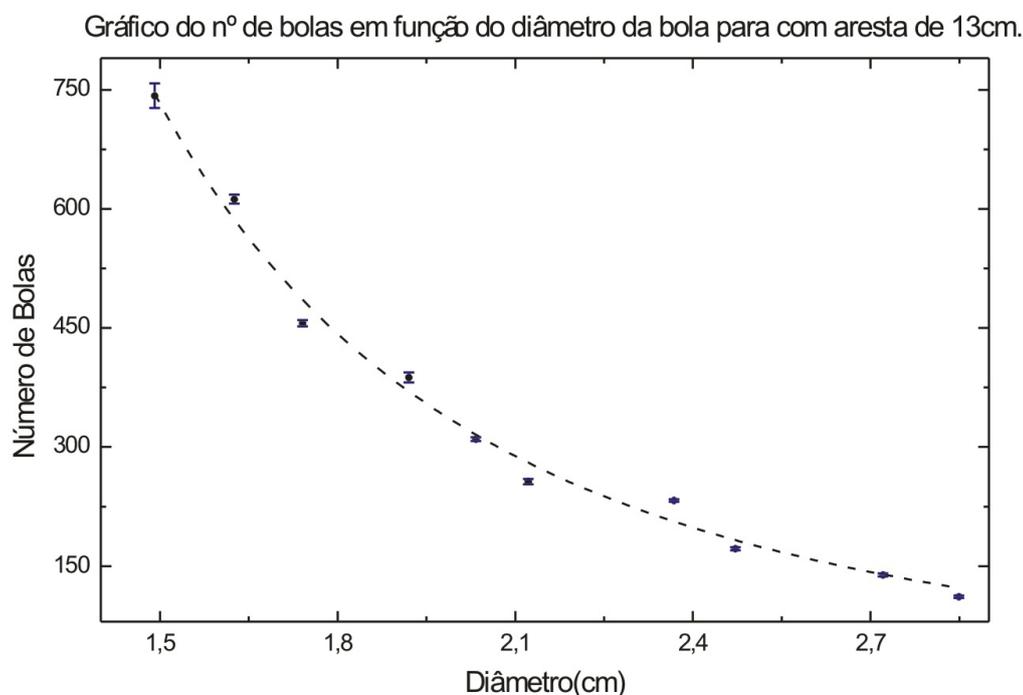


Figura 3.8: Gráfico do número de bolas que preenche uma cavidade em função do seu diâmetro.

As dificuldades experimentais para preencher cavidades grandes e o tempo que leva para

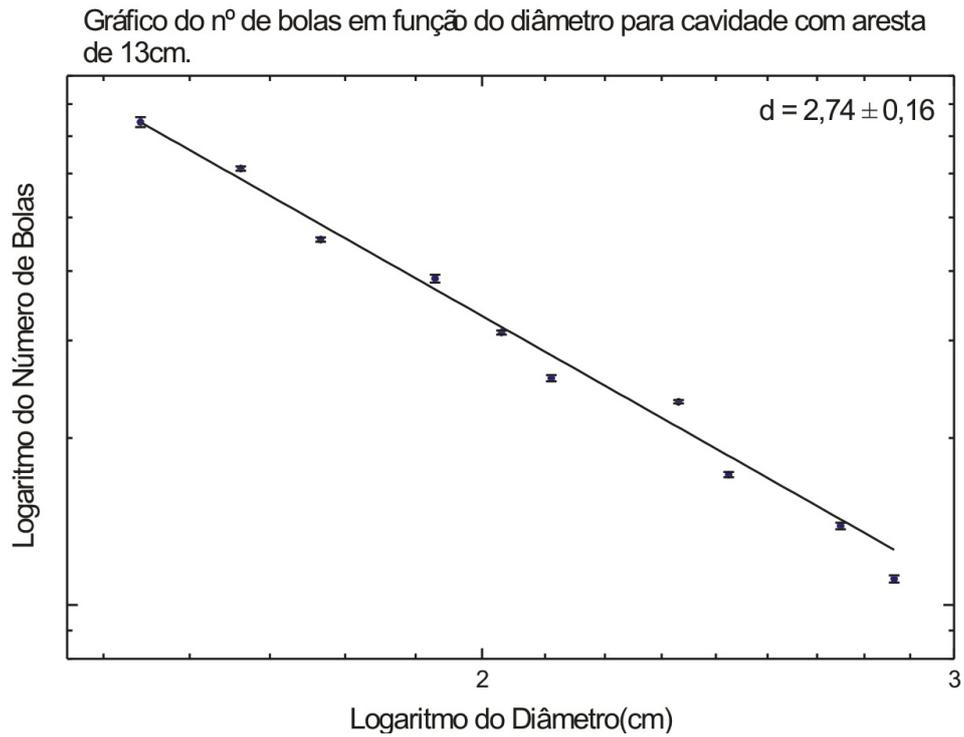


Figura 3.9: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

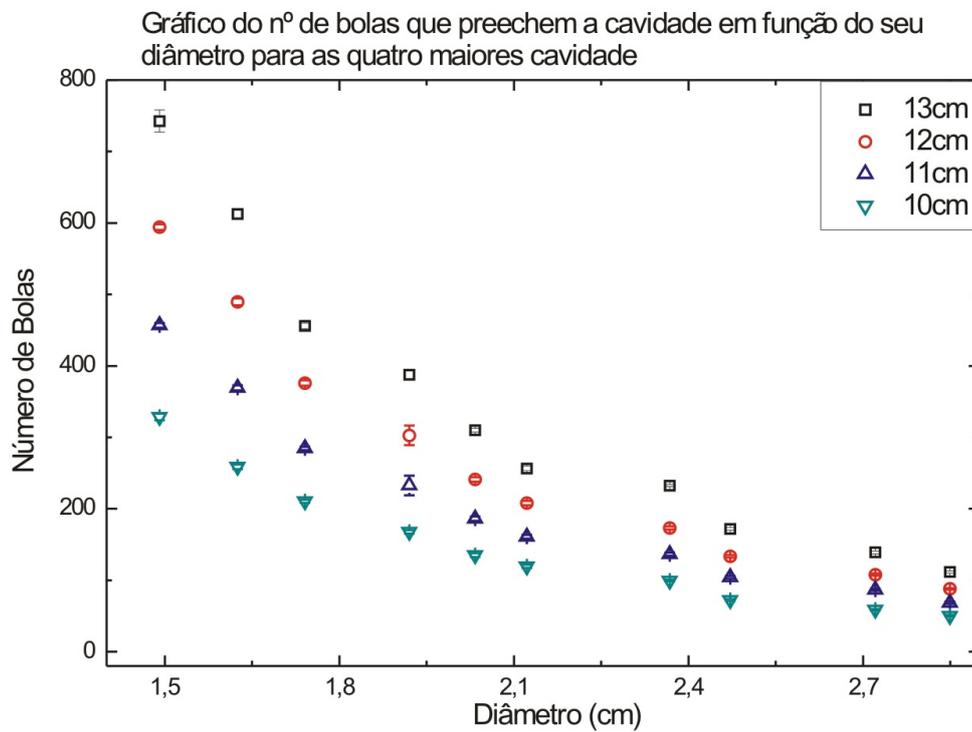


Figura 3.10: Gráfico do número de bolas que preenche uma cavidade em função do seu diâmetro para as quatro maiores cavidades.

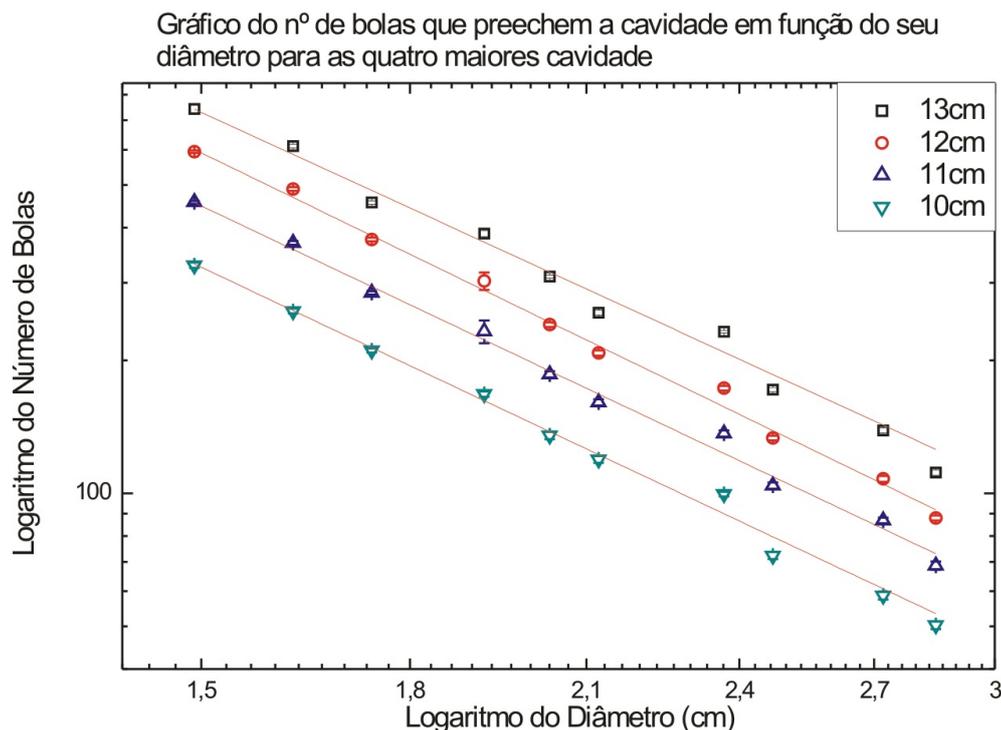


Figura 3.11: Gráfico do logaritmo do número de bolas que preenche uma cavidade em função do seu diâmetro para as quatro maiores cavidades.

contar o número de bolas contidas nas cavidades, nos impuseram uma pequena faixa de tamanho de cavidades. Mas os resultados indicam que, se aumentarmos o tamanho das cavidades, poderemos obter valores de dimensão e frações de empacotamento cada vez maiores, tendendo a um valor máximo independente da relação entre o diâmetro da bola e a aresta da cavidade. Quando as razões entre os volumes forem muito grandes, tendendo ao infinito, podemos considerar, numa perspectiva de propriedades macroscópicas, que atingimos os limites onde temos os valores para dimensão e fração de empacotamento 3 e 1, passando a considerar os aglomerados como sólidos contínuos.

Com o intuito de extrapolar o limite prático do experimento, tentou-se criar uma simulação computacional para bolinhas de papel. A simulação consiste em criar uma esfera varrendo θ e φ de forma que, em cada ponto, r varia aleatoriamente dentro de um intervalo definido. Para poucos pontos, foi possível criar uma figura que se assemelha às bolas de papel, no entanto, quando aumenta-se o número de pontos das coordenadas θ e φ a figura passa a se assemelhar a um ouriço do mar, ver Figura 3.12.

Os resultados apresentados até aqui são para aglomerados de bolas de um mesmo tamanho. Com a intenção de verificar o comportamento de aglomerados de bolas de papel com mais de um tamanho, foram feitas medidas com bolas de dois tamanhos diferentes. Para teste da metodologia, usou-se inicialmente o maior e o menor tamanhos, (bolas de tamanho

Tabela 3.9: Valores das dimensões encontradas pela relação do número de bolas pelos seus diâmetros.

Aresta (<i>cm</i>)	Dimensão	Erros
04	3,272	0,070
05	2,991	0,021
06	2,924	0,069
07	2,835	0,075
08	2,860	0,062
09	2,850	0,063
10	2,816	0,093
11	2,827	0,067
12	2,901	0,062
13	2,74	0,16

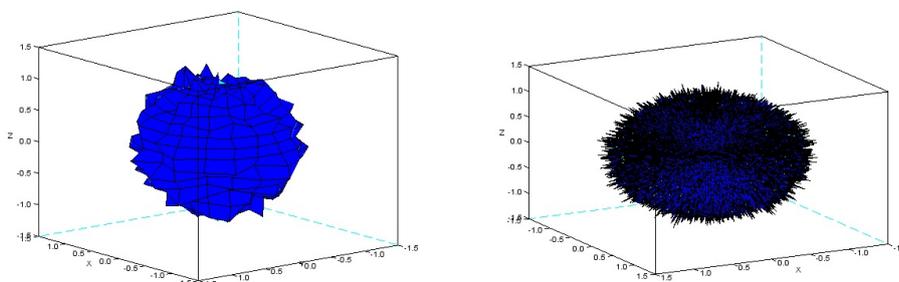


Figura 3.12: Imagens criada por meio de simulação computacional. A imagem da esquerda foi criada com 400 pontos e a da direita com 4000 pontos.

08x08 e 17x17). Utilizou-se apenas a maior cavidade (aresta de 13cm), com o objetivo de estudar a fração de empacotamento desse sistema. Para isso, o aglomerado de bolas introduzidos na cavidade, inicialmente possuía 10% de bolas maiores e 90% das menores, sendo o percentual, a cada novo conjunto de medidas, variado de 5%, de tal forma que foi possível modelar o comportamento da fração de empacotamento pela relação abaixo:

$$f = \frac{V_0}{V_C} \quad (3.5)$$

Onde V_C é o volume da cavidade e o volume ocupado V_0 , é dado por:

$$V_0 = xn_GV_G + (1 - x)n_PV_P \quad (3.6)$$

onde n_G é o número de bolas maiores, V_G é o volume médio das bolas maiores, n_P é o número de bolas menores, V_P é o volume médio das bolas menores e x é o percentual de

bolas maiores presentes na amostra.

Substituindo a eq. 3.6 na eq. 3.5, finalmente tem-se

$$f = \frac{xn_G V_G + (1-x)n_P V_P}{V_C}$$

$$f = \left(\frac{V_P}{V_C}\right) n_P + \left[\left(\frac{V_G}{V_C}\right) n_G - \left(\frac{V_P}{V_C}\right) n_P\right] x \quad (3.7)$$

A partir das medidas obteve-se o gráfico da Figura 3.13, onde a fração de empacotamento está representada em função da quantidade percentual de bolas 17x17. Esse gráfico apresenta um comportamento em que há uma descontinuidade na reta que representa o comportamento do empacotamento do aglomerado misto quando a quantidade de bolas 17x17 está entre 60% a 70% do volume ocupado. Este resultado pode estar associado ao comportamento de compactação de proteínas, estudos realizados mostram que proteínas compostas por até 60% a 70% de cadeias secundárias possuem maior compactação, onde as cadeias secundárias sendo mais longas estariam associadas as bolas maiores e as bolas menores seriam aminoácidos agregados a proteína (VOET; VOET, 1995) (FIGUEIREDO et al., 2010). Obtém-se também que a mistura de bolas 08x08 e 17x17 possui frações de empacotamento maiores que para os aglomerados de um só tamanho.

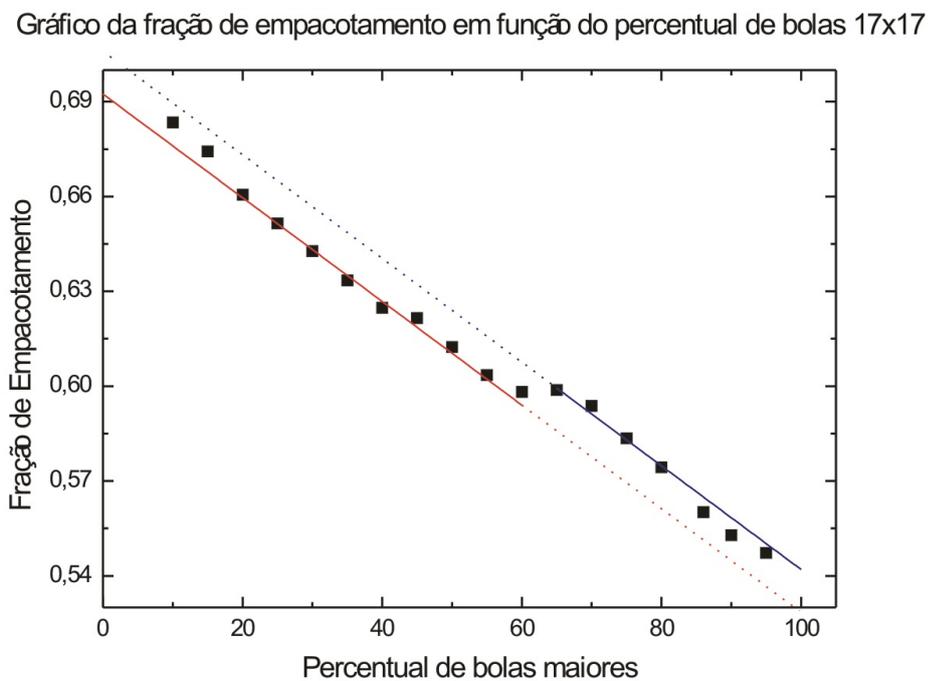


Figura 3.13: Relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17x17 em relação as bolas 08x08.

Pode-se observar que no gráfico da Figura 3.13 há dois intervalos que apresentam comportamento linear. Esses intervalos podem ser representados pela Eq. 3.7 que gera as retas em azul e verde, essas retas possuem mesmo coeficiente angular sendo que a diferença entre as duas retas é apenas um deslocamento. O deslocamento entre esses dois intervalos corresponde a uma transição de fase. No intervalo que vai até 60%, há uma predominância do comportamento do aglomerado de bolas de tamanho 08x08, e no seguinte a predominância é do comportamento do aglomerado de bolas 17x17.

A fim de verificar se os resultados encontrados para o empacotamento misto de bolas de 08x08 e 17x17 eram apenas coincidências, foram feitas medidas em aglomerados mistos com bolas de tamanhos 12x12 e 17x17. O gráfico da Figura 3.15 é confeccionado a partir dos resultados das medidas de empacotamento da mistura de bolas 12x12 e 17x17. Pode-se verificar que a figura 3.15 apresenta curva que possui mesma tendência que a verificada na Figura 3.13 onde ambas podem ser ajustadas pela Eq. 3.7. No entanto, o intervalo que corresponde à transição de fase da mistura 12x12 e 17x17, é maior que para a mistura 08x08 e 17x17 devido ao fato dos diâmetros das bolas 12x12 e 17x17 serem valores próximos. Essa proximidade entre os tamanhos das bolas 12x12 e 17x17 faz com que esses aglomerados tenham comportamentos semelhantes, aumentando a faixa que não é possível distinguir o comportamento separado de cada um.

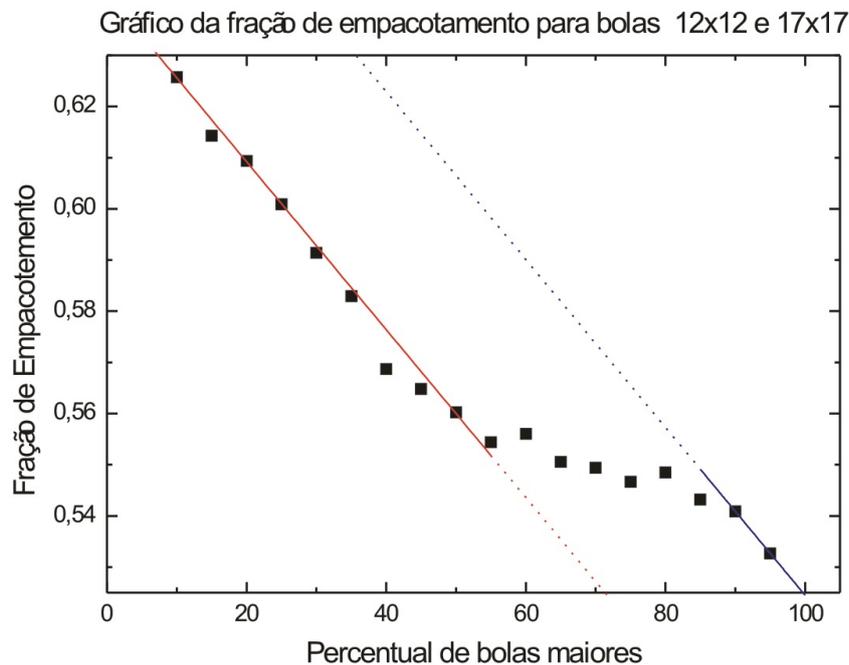


Figura 3.14: Curva da relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17x17 em relação as bolas 12x12.

Todos os resultados encontrados para os empacotamentos mistos foram obtidos calculando-

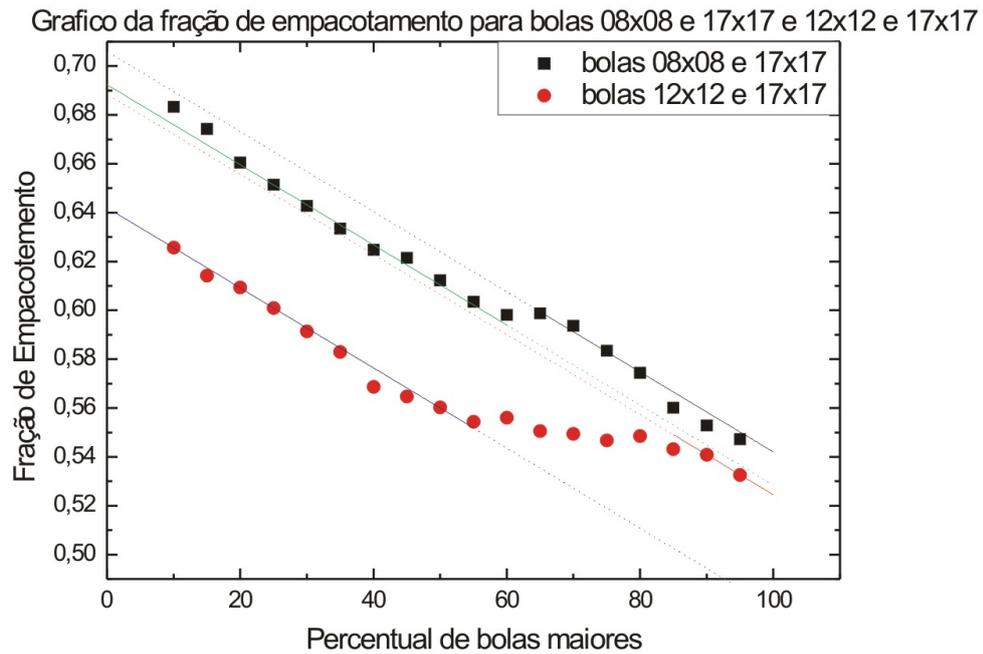


Figura 3.15: O gráfico mostra duas curvas da relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17x17 em relação as bolas 08x08 e 12x12, com volumes calculados para o expoente 2,51.

se os volumes das bolas com o expoente de 2,51, de acordo com a relação massa-tamanho obtida por Gomes (1988). Quando esses volumes foram calculados para um expoente 3 as curvas encontradas em nada se assemelhavam àquelas encontradas anteriormente. Como se pode verificar na Figura 3.16 as misturas de bolas de dois tamanhos diferentes mostram um comportamento irregular quando comparado ao volume determinado pelo expoente 2,51. Isso indica que o volume calculado a partir do espaço de dimensões fracionárias regulariza a fração de empacotamento generalizada, acentuando a transição de fase.

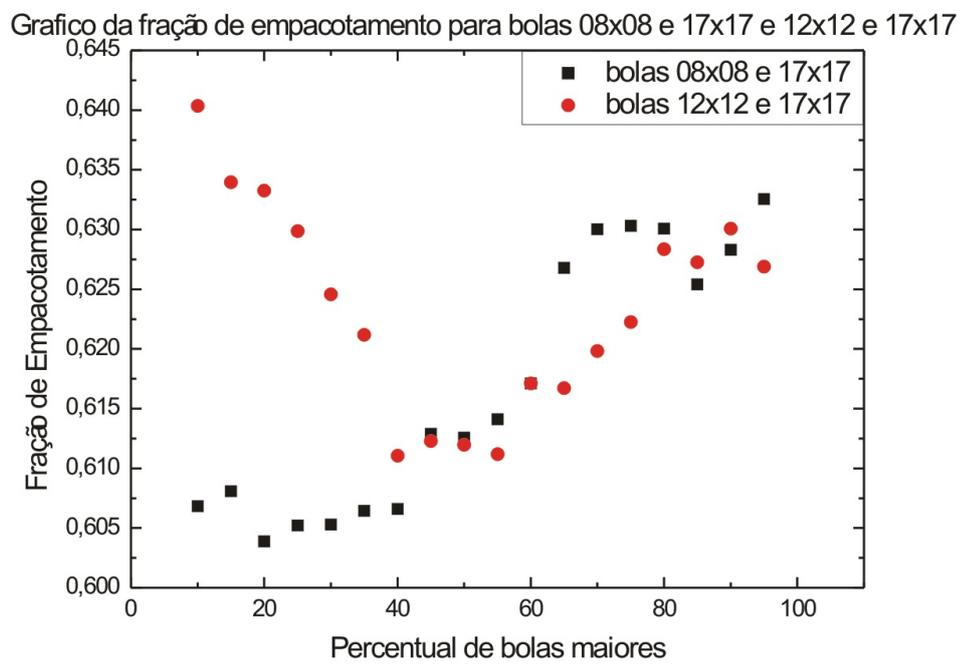


Figura 3.16: O gráfico mostra duas curvas da relação entre a fração de empacotamento e a quantidade de bolas 17x17 em relação as bolas 08x08 e 12x12, com volumes calculados para o expoente 3.

Conclusão

Problemas de empacotamento que são relativamente antigos, ainda hoje encontram-se no foco de muitas pesquisas, principalmente por seu valor econômico. Muito se tem estudado sobre empacotamento de estruturas regulares, para as quais existem modelos teóricos que dão boas previsões. No entanto, pouco se pode dizer sobre o empacotamento de estruturas irregulares.

Estruturas regulares, em geral, são construções humanas. Não sendo comum encontrá-las na natureza, o homem tenta modelar os objetos naturais como objetos regulares, o que nem sempre é possível. Os objetos naturais são melhor descritos pela geometria fractal, cujas formas irregulares são caracterizadas por dimensões não inteiras.

Dentre os objetos fractais já estudados encontra-se a bola de papel amassado (GOMES, 1987), cuja dimensão fractal é de 2,51. Apesar da dimensão da bola de papel ser bem estabelecida, o que se pode dizer sobre a dimensão de mais de duas bolas unidas (aglomerado)? Qual seria seu comportamento com o aumento de seu tamanho (número de bolas)?

Na tentativa de responder a estas questões, foram realizados vários experimentos. A partir das medidas desses experimentos, foram obtidos valores das frações de empacotamento que variam de acordo com os tamanhos das cavidades e os diâmetros das bolas. Os diversos valores de fração de empacotamento estão associados à sensibilidade do sistema às condições de fronteira. Dessa forma, quanto maior a razão L/D (entre a aresta da cavidade e o diâmetro da bola) menores são os efeitos de fronteira e maiores os valores de fração de empacotamento, de forma que se essa razão tender a infinito, pode-se admitir que o sistema passa a ter características macroscópicas semelhantes a um sólido contínuo. Os valores de fração de empacotamento excedem o valor de 0,64 nos casos em que a razão L/D é maior que 6,7. Apesar disto, medidas com bolas de isopor, esferas regulares de dimensão 3, mostraram que elas possuem fração de empacotamento maior que as bolas de papel amassado. Os resultados encontrados para determinar as dimensões dos aglomerados a partir da metodologia usual - pela relação massa-tamanho - mostraram-se insatisfatórios.

Passou-se a utilizar outra metodologia para a determinação das dimensões dos aglomerados. Feder (1988) definiu a dimensão de aglomerados a partir de uma ideia simples de recobrimento, onde a dimensão poder ser determinada pela Eq. 3.4. Essa metodologia assemelha-se ao BoxCounting, usado para a determinação da dimensão. A diferença entre

nossa abordagem e o BoxCounting está no fato de que este utiliza como sonda objetos euclidianos regulares, enquanto que, para os aglomerados estudados a sonda é um objeto fractal de dimensão 2,51 (a bola de papel).

O gráfico da Figura 3.9 mostra a dimensão do aglomerado, para a cavidade com aresta de 13cm, com o valor de $d = 2,74 \pm 0,16$. Cada cavidade apresenta valor distinto da dimensão do aglomerado como pode ser visto na Tabela 3.9. Essa distinção entre os valores dos aglomerados estão associados à sensibilidade do sistema às condições de fronteiras. Eliminando-se as três menores cavidades, que apresentavam valores para as dimensões iguais ou superiores a três (quando associados a seus erros), observa-se que o valor da dimensão possui predominância em torno do valor $d = 2,84$. Esse valor dá uma ideia de que aglomerados de bolas de papel amassado ocupam mais espaço que a própria bola de papel.

Como visto, os resultados para fração de empacotamento e dimensão fractal para os aglomerados possuem grande sensibilidade à fronteira, apresentando valores que variam com o aumento da razão L/D. No entanto, os tamanhos de arestas com os quais trabalhamos, apesar da tendência, não forneceram valores estáveis. Limitações de ordem prática nos impediram de usar cavidades com arestas maiores do que as utilizadas.

A curva do gráfico apresentado na Figura 3.13 descreve o comportamento de aglomerados mistos, isto é, sistemas formados por bolas de papel com dois tamanhos médios diferentes, sendo identificadas como os tamanhos 08x08 e 17x17, que correspondem ao menor e maior tamanho de bolas utilizadas em nossos estudos.

Nessa curva, é possível observar que a fração de empacotamento generalizada comporta-se linearmente em duas regiões de concentração bem marcada: uma região correspondente a frações menores que 60 % e a outra correspondente a frações maiores que 70% . Na região intermediária (60% a 70%) observa-se uma espécie de transição de fase estrutural de ordem superior (maior ou igual a 2). Curiosamente, o coeficiente angular das retas que representam as porções lineares dos gráficos é o mesmo. Um cálculo simples mostra como se calcula esse coeficiente angular. Infelizmente, esse modelo não explica a transição.

Desta forma, analisando o regime para frações menores que 60% , a probabilidade de contato entre as bolas 08x08, e 08x08 com 17x17 é maior que o contrato entre as 17x17. O comportamento nesse intervalo possui a tendência de ter um maior fator de empacotamento devido ao fato de que, apesar da proporção entre o número de bolas colocadas e retiradas serem as mesmas, o volume total das bolas retiradas é maior que o volume acrescentado.

No regime para frações maiores que 70% há predominância de bolas de maior tamanho

(17x17); nessa região a probabilidade de ocorrência de contatos entre bolas 08x08 é menor que os contatos 08x08 com 17x17, e entre as bolas 17x17. Nesse caso, prevalece um regime com características do sistema formado por bolas maiores.

Não se pode dizer com exatidão qual o mecanismo responsável pela transição de fase observada. Sabe-se, todavia, que nesse intervalo há uma concorrência entre as probabilidades dos contatos onde todos os tipos de contatos entre as bolas são igualmente possíveis. Desta forma, esse intervalo pode ser caracterizado como a região de transição de fase entre o sistema de características predominantes dos aglomerados de bolinha 08x08 para o sistema em que as características dos aglomerados 17x17 dominam.

Foram feitas medidas de aglomerado misto com bolas de tamanho 12x12 e 17x17, a fim de verificar os efeitos descritos para a mistura de bolas 08x08 e 17x17. Os resultados para a mistura de 12x12 e 17x17 apresentam mesmo comportamento que os encontrados anteriormente, com dois intervalos lineares de mesmo coeficiente angular. Para este aglomerado observou-se que a transição de fase é mais suave, porém a diferença entre os dois regimes lineares é bem mais nítida, corroborando a transição de fase observada no caso anterior. No entanto, o intervalo correspondente à transição de fase é mais largo devido ao fato dos diâmetros das bolas serem próximos.

Os gráficos para aglomerados mistos foram feitos calculando-se os volumes “generalizados” das bolas de papel com dimensão $d = 2,51$. Essas curvas apresentaram comportamento regular que é facilmente descrito pela Eq. 3.7, possuindo os mesmos coeficientes angulares. Ou seja, quando a sonda é tratada com sua real dimensão os resultados encontrados apresentam comportamento regular. No entanto, a estrutura formada pelo aglomerado de bolas de papel não é regularizada quando se trata a sonda (bolas de papel) como um objeto regular euclidiano, isto é, quando os volumes das bolas eram calculados com expoente igual a 3 (euclidiano), o comportamento das curvas mudavam, tornando-se irregulares, como pode ser visto na Figura 3.16, divergindo do comportamento referente ao empacotamento de proteínas composta de cadeia principal e secundária.

Os modelos computacionais elaborados nesse trabalho, apesar de não fornecerem valores para as dimensões fractais das bolas de papel e seus aglomerados, são um primeiro esboço na tentativa de criarmos um modelo computacional para bolas de papel. Acreditamos que modelagem computacional podera comprovar a tendência da dimensão fractal $d \sim 2,8$, independentemente do tamanho do aglomerado ou da forma geométrica da cavidade. A confirmação destes resultados ajudaria na elaboração de uma teoria adequada para o comportamento fractal de aglomerados assim como de proteínas, sendo esses os objetivos de estudos futuros.

Histograma das Distribuições de Diâmetros

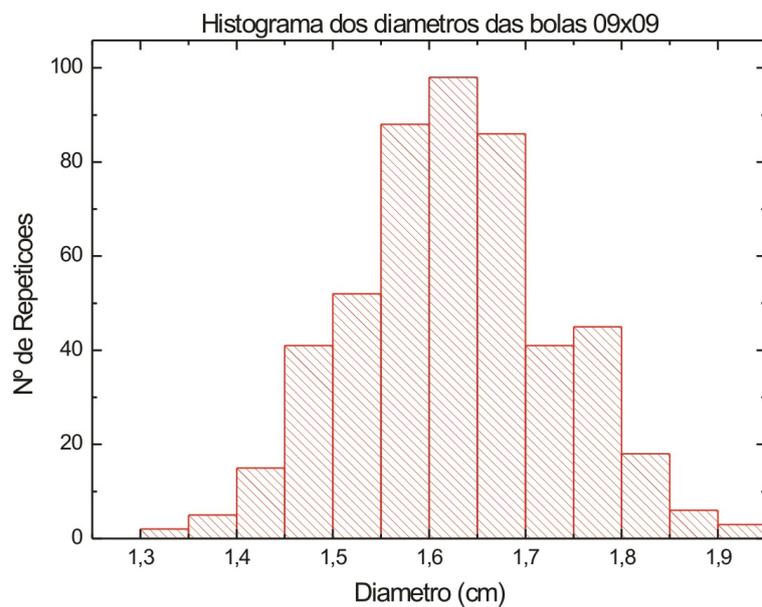


Figura A.1: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 09x09.

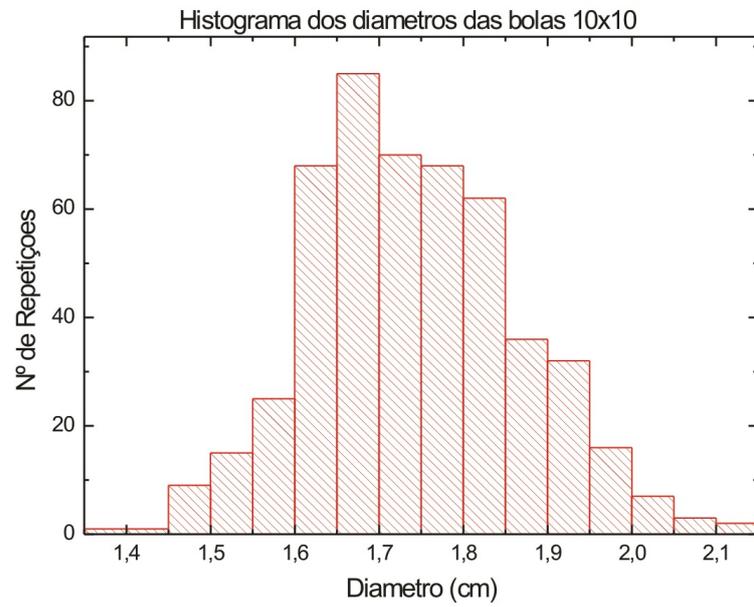


Figura A.2: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 10x10.

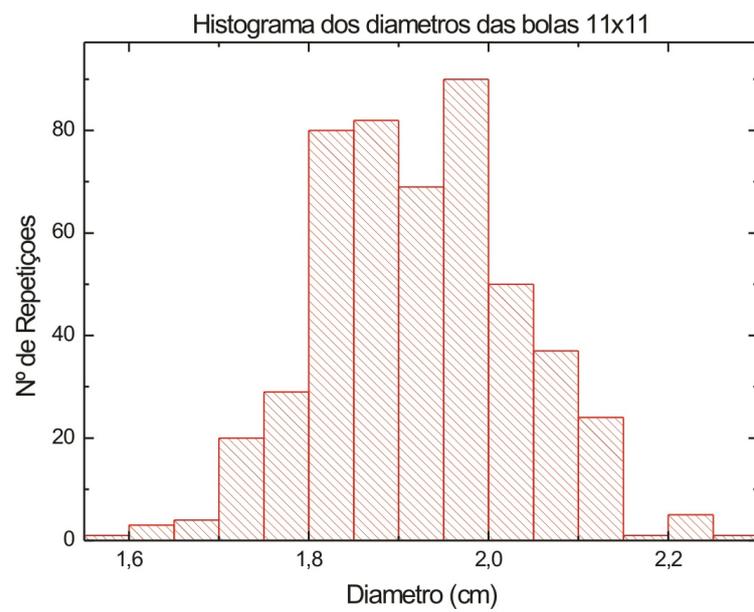


Figura A.3: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 11x11.

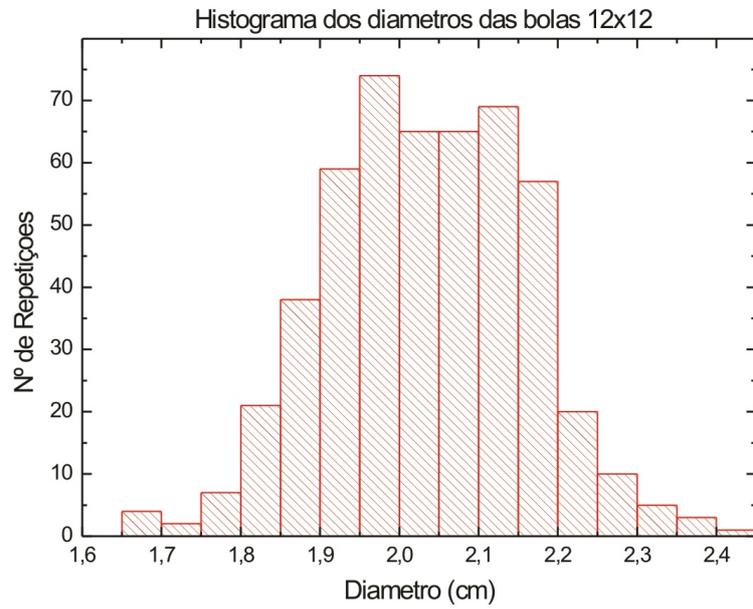


Figura A.4: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 12x12.

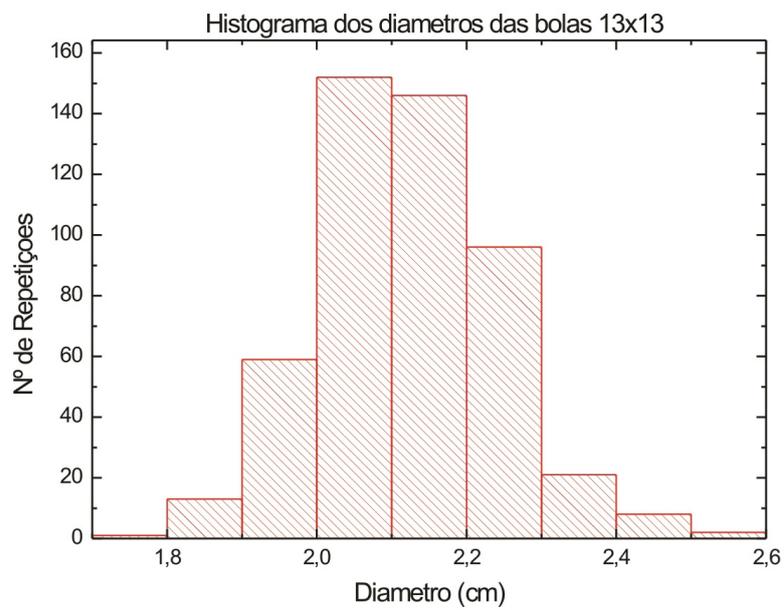


Figura A.5: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 13x13.

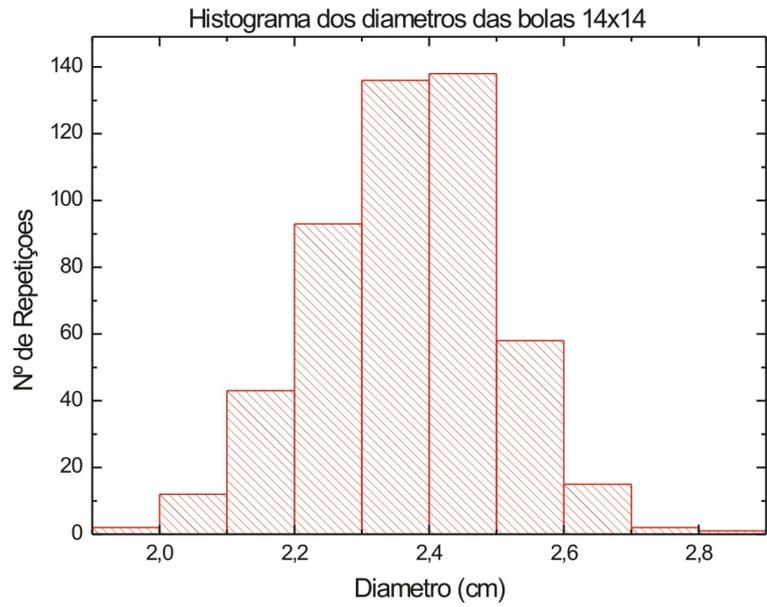


Figura A.6: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 14x14.

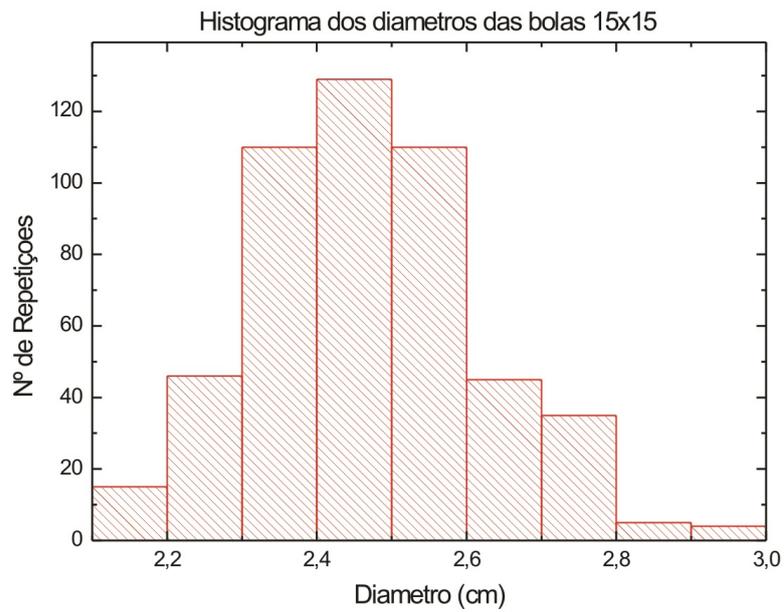


Figura A.7: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 15x15.

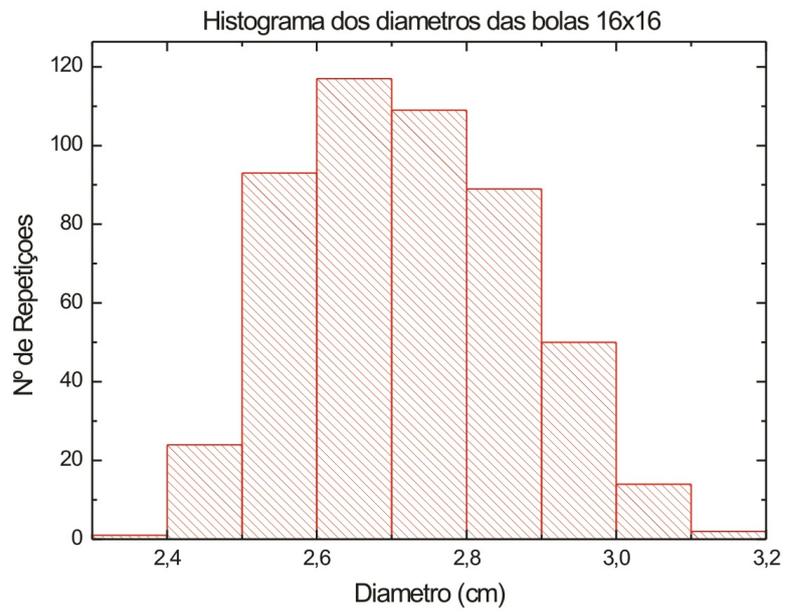


Figura A.8: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 16x16.

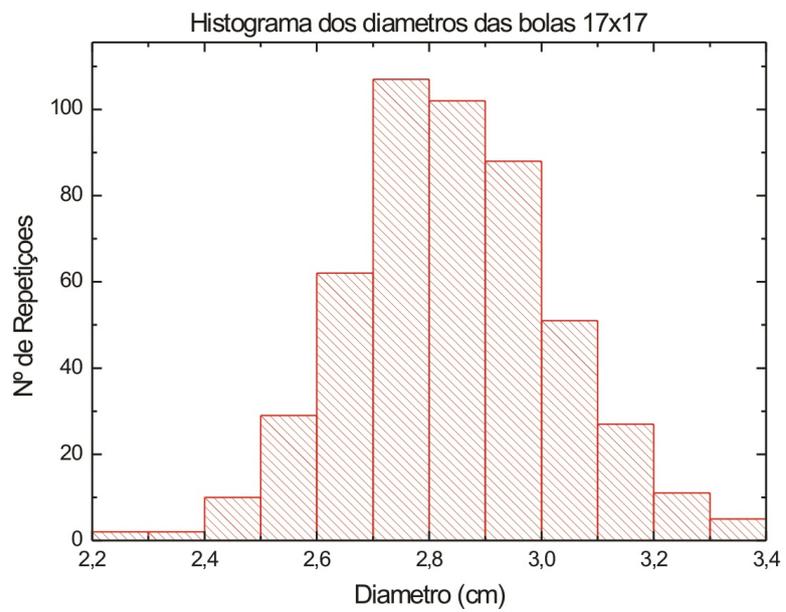


Figura A.9: Distribuição dos diâmetros medidos para as bolas 17x17.

Gráficos da dimensão dos aglomerados

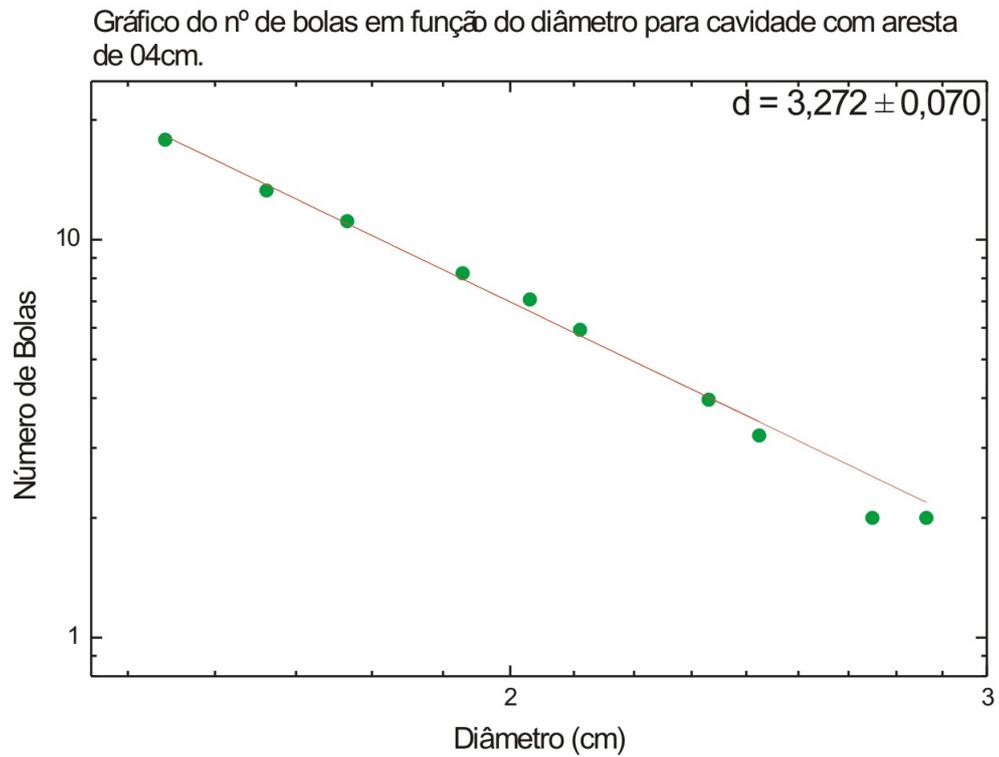


Figura B.1: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 05cm.

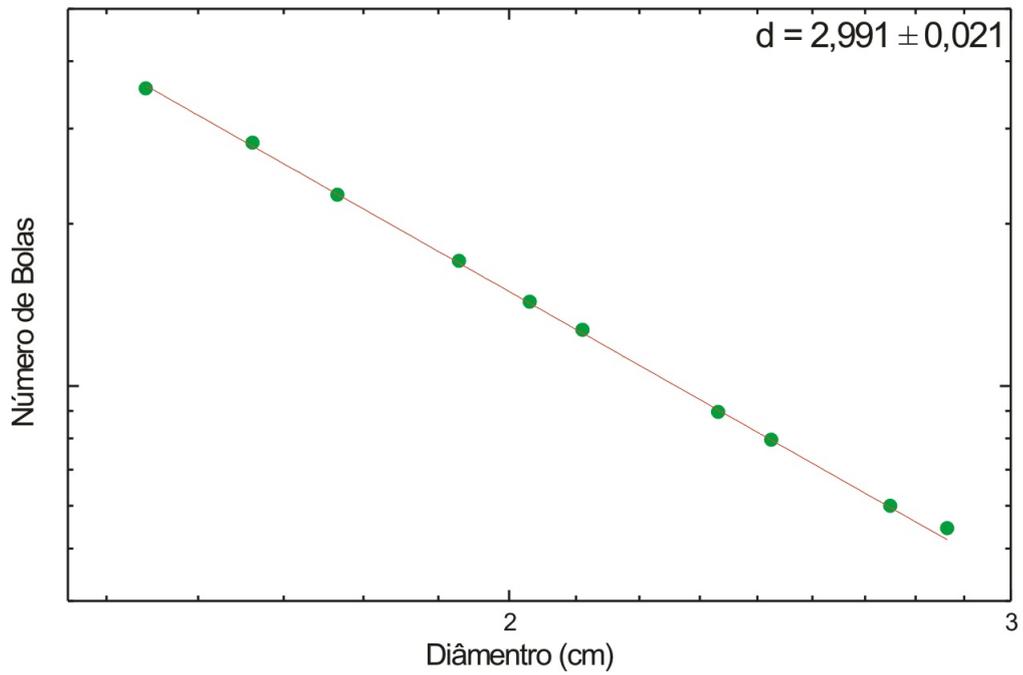


Figura B.2: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 06cm.

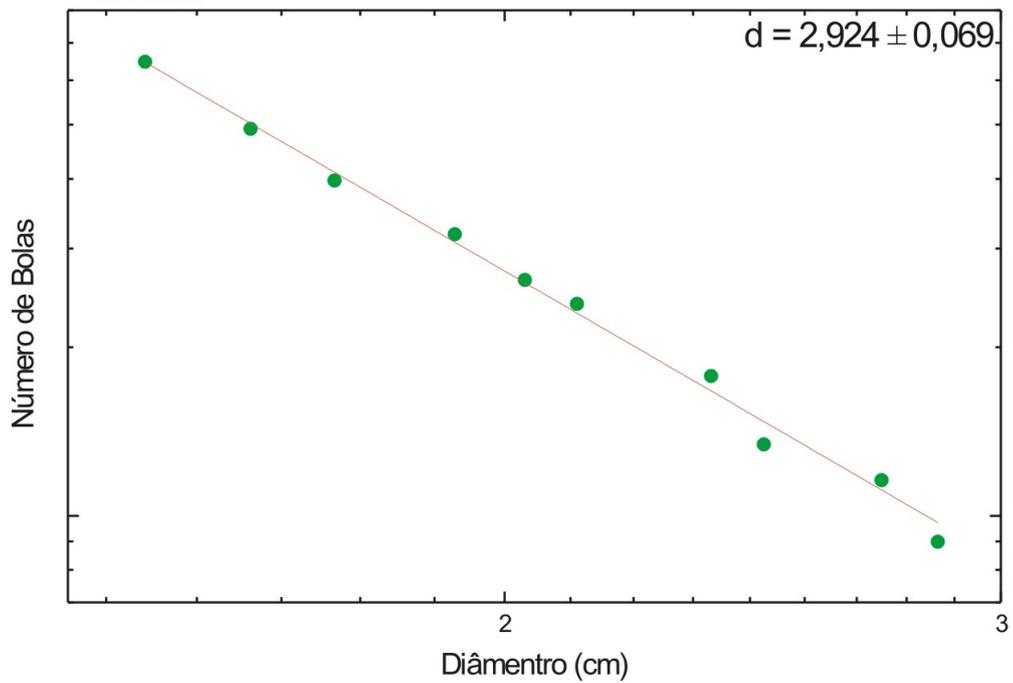


Figura B.3: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 07cm.

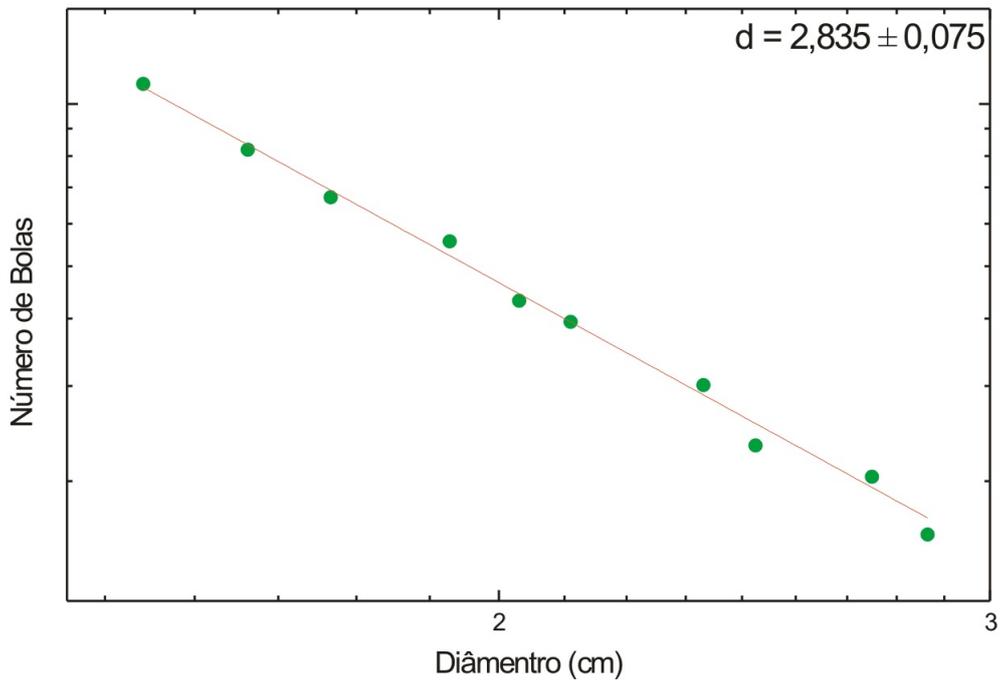


Figura B.4: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 08cm.

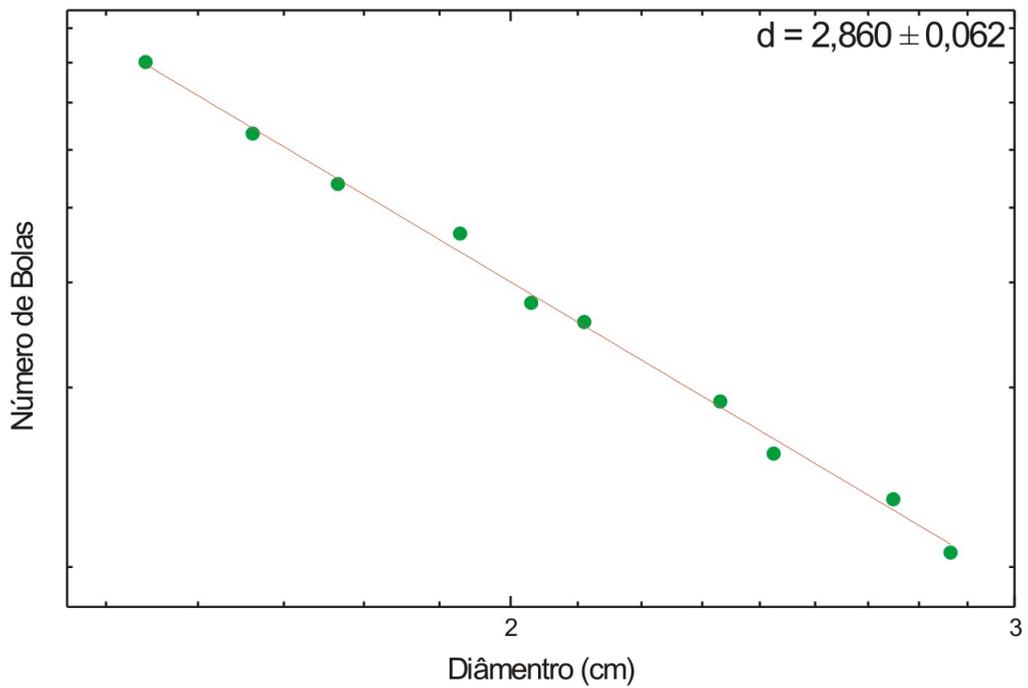


Figura B.5: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 09cm.

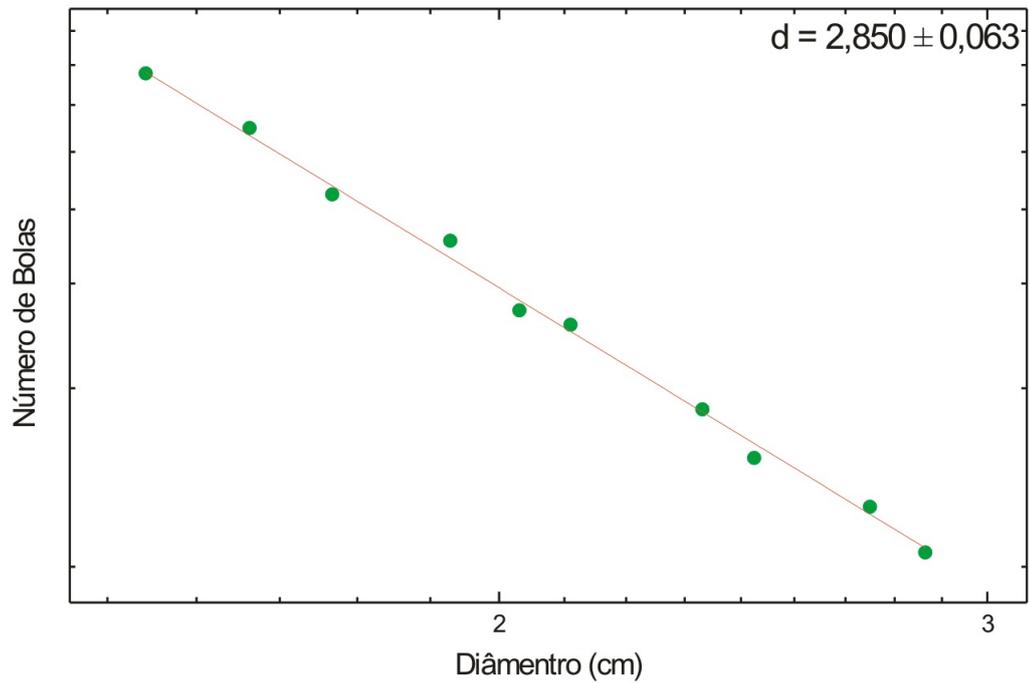


Figura B.6: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 10cm.

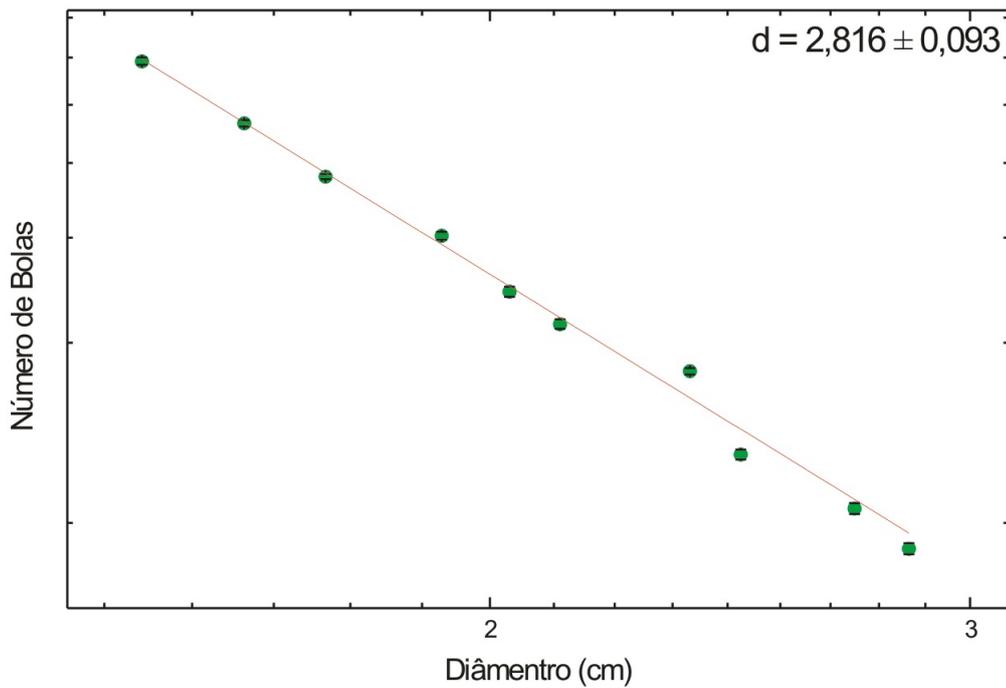


Figura B.7: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 11cm.

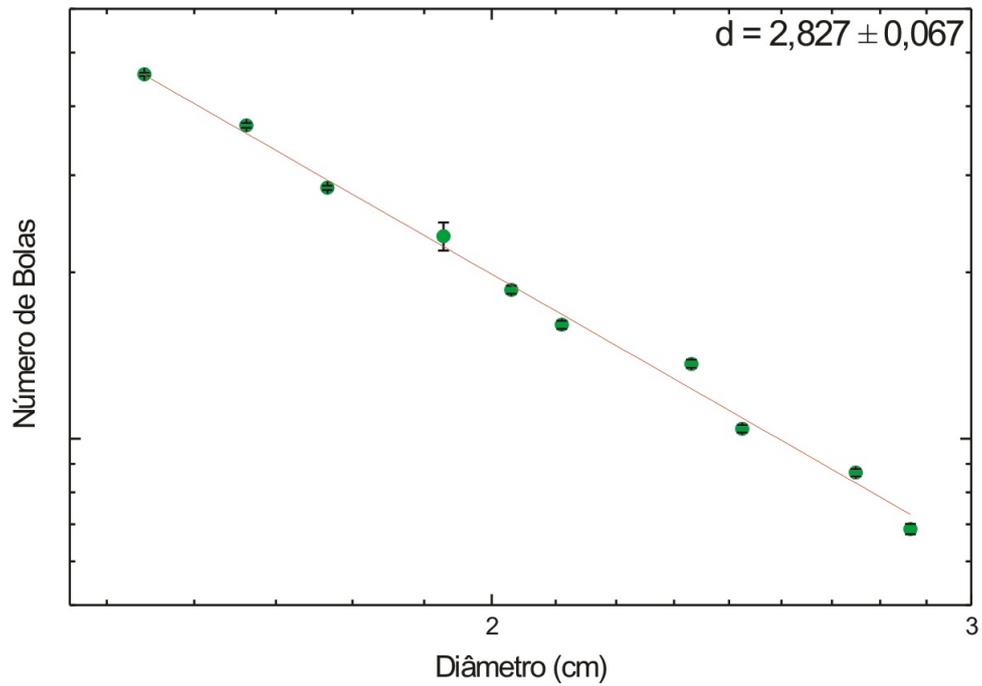


Figura B.8: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Gráfico do nº de bolas em função do diâmetro para cavidade com aresta de 12cm.

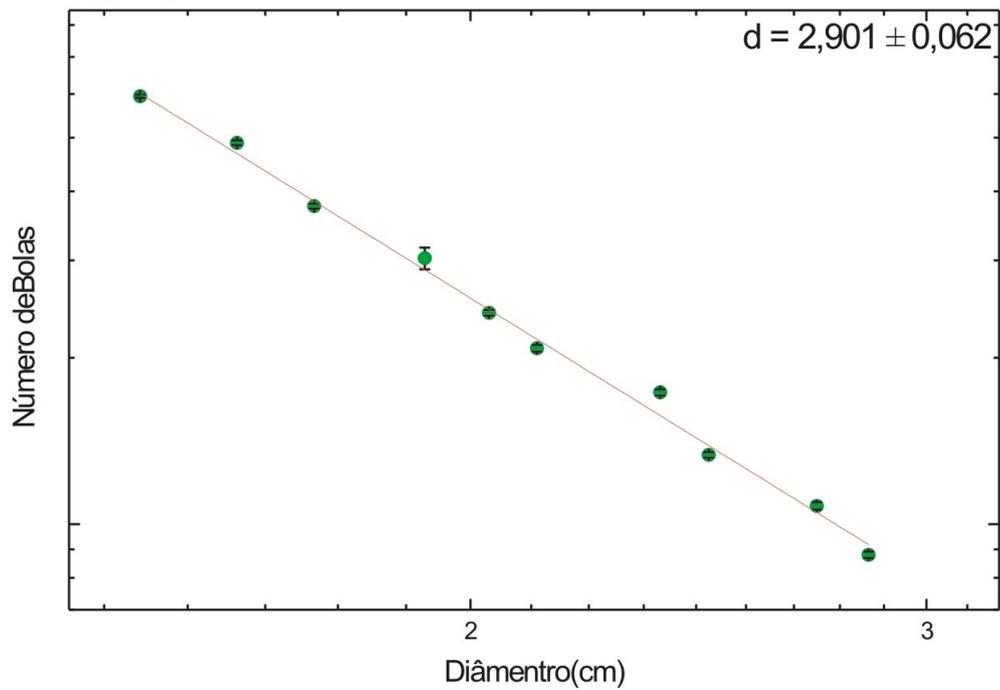


Figura B.9: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

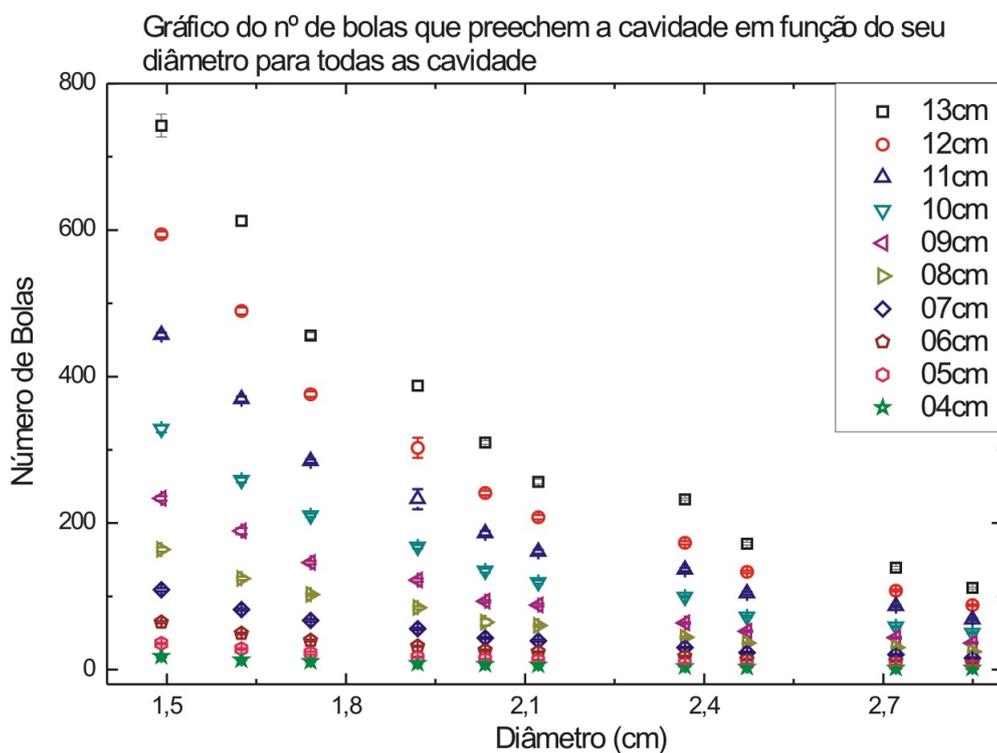


Figura B.10: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

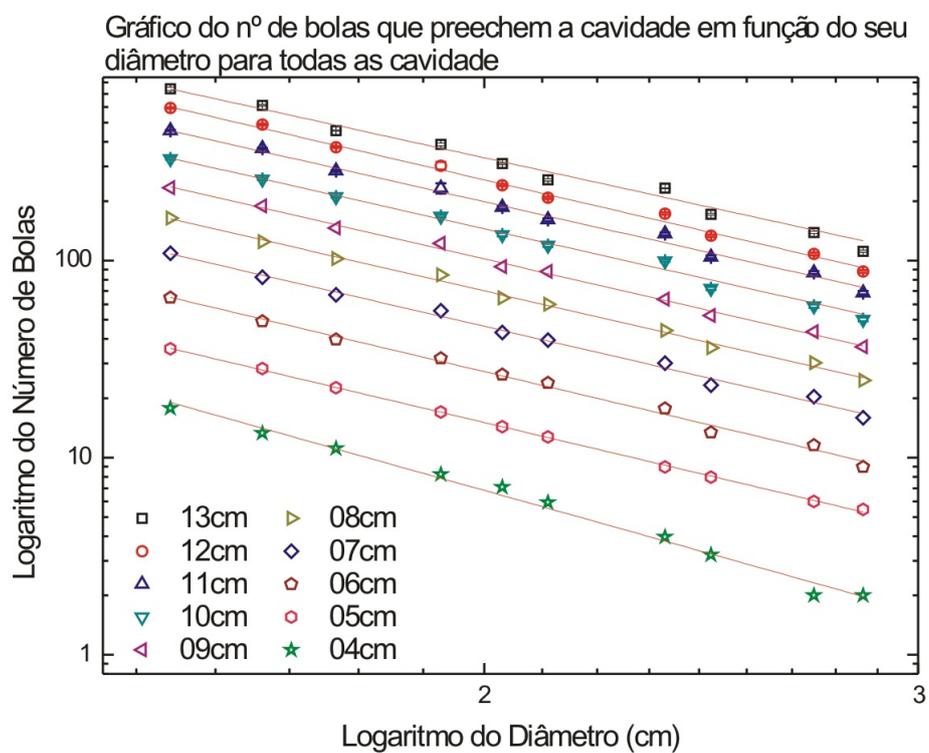


Figura B.11: Gráfico log-log para determinar o valor da dimensão do aglomerado.

Referências Bibliográficas

- ADDISON, P. S. *Fractals and chaos: an illustrated course*. London: IOP Publishing, 1997.
- AMOREIRA, J.; JESUS, M. *Apontamentos de Física do Estado Sólido*. Maio 2012. [Http://www.dfisica.ubi.pt/amoreira/lectnotes/fesnts.pdf](http://www.dfisica.ubi.pt/amoreira/lectnotes/fesnts.pdf).
- ASTE, T.; WEAIRE, D. *The pursuit of perfect packing*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 2000.
- BACKES, A. R.; BRUNO, O. M. Técnicas de estimativa da dimensão fractal: Um estudo comparativo. *INFOCOMP Journal of Computer Scienc*, v. 4, n. 3, p. 50–58, 2005.
- BORKOVEC, M.; PARIS, W.; PEIKERT, R. The fractal dimension of the apollonian sphere packing. *Appeared in Fractals*, v. 2, n. 4, p. 521–526, 1994.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- DONEV, A.; AL. et. Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids. *Science*, v. 303, n. 5660, p. 990–993, 2004.
- FEDER, J. *Fractals*. Oslo: Publisher: Springer, 1988.
- FIGUEIREDO, P.; MORET, M.; COUTINHO, S.; JR, E. N. The role of stochasticity on compactness of the native state of protein peptide backbone. *The Journal of Chemical Physics*, n. 133, p. –, 2010.
- GOMES, M. A. F. Paper crushes fractally. *J. Phys. A: Math. Gen.*, n. 20, p. 283–284, 1987.
- HERRMAN, H.; BARAM, R.; WACKENHUT, M. Dense packings. *Brazilian Journal of Physics*, v. 36, n. 3A, p. 610–613, 2006.
- JR., A.; AL. et. Apollonian networks: Simultaneously scale-free, small world, euclidean, space filling, and with matching graphs. *Physical Review Letters*, n. PRL 94, p. 018702–1–018702–4, 2005.
- MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1977.
- MIRANDA, J. *Análisis Fractal Del Microrrelieve Del Suelo*. Tese (Ciencias de la Navegación y de la Tierra) — Departamento de Ciencias de la Navegación y de la Tierra; Universidade de a Coruña, Coruña, 2000.
- M.JANOS. *Matemática e natureza*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MORET, M.; MIRANDA, J.; JR, E. N.; SANTANA, M. C.; ZEBENDE, G. Self-similarity and protein chains. *PHISICAL REVIEW E*, n. 71, p. 012901–1–012901–3, 2005.

NUNES, R. *Geometria Fractal e Aplicações*. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.

PEREIRA, A. *Fractais: Caracterização e Leis de Formação*. Dissertação (Trabalho de conclusão de curso; Licenciatura em matemática) — Universidade Estadual Vale do Acaraú, Sobral, 2007.

SCOTT, G. D.; KILGOUR, D. M. The density of random close packing of spheres. *BRIT. J. APPL. PHYS. J. PHYS. D*, v. 2, n. 2, p. 863–866, 1969.

SILVA, A.; A.M.SEGADÃES; DEVEZAS, T. Aplicação de método estatístico na otimização da densidade de empacotamento de distribuições de pós de alumina. *Cerâmica*, n. 50, p. 345–354, 2004.

STARIOLO, D. A. *Introdução a Física da Matéria Condensada*. Maio 2012. [Http://www.if.ufrgs.br/stariolo/ensino/curso2009.pdf](http://www.if.ufrgs.br/stariolo/ensino/curso2009.pdf).

TORQUATO, S.; STILLINGER, F. H. Jammed hard-particle packings: From kepler to bernal and beyond. *Reviews of Modern Physics*, v. 82, n. 3, p. 2633–2672, 2010.

VOET, D.; VOET, J. *Biochemistry*. New York: Wiley, 1995.

WOLFRAM, S. A. *New Kind of Sciece*. [S.l.]: Publisher: Wolfram Media, 2002.

ZOU; LING-NAN; AL. et. The packing of granular polymer chains. *Science*, v. 326, n. 5951, p. 408–410, 2006.

Caracterização de autossimilaridade de estruturas rugosas compactas

Gleudson de Oliveira Pinto

Salvador, Outubro de 2013.