



SENAI CIMATEC

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM  
COMPUTACIONAL E TECNOLOGIA INDUSTRIAL

Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial

Dissertação de mestrado

**Transmissão de dados em fibras óticas através do  
Momento Angular Orbital da luz**

Apresentada por: Thomio Watanabe

Orientador: Pablo Vaveliuk

Fevereiro de 2015

Thomio Watanabe

# Transmissão de dados em fibras óticas através do Momento Angular Orbital da luz

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial, Curso de Mestrado em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial do SENAI CIMATEC, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial**.

Área de conhecimento: Interdisciplinar

Orientador: Pablo Vaveliuk

*SENAI CIMATEC*

Salvador

SENAI CIMATEC

2015

# Nota sobre o estilo do PPGMCTI

Esta dissertação de mestrado foi elaborada considerando as normas de estilo (i.e. estéticas e estruturais) propostas aprovadas pelo colegiado do Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial e estão disponíveis em formato eletrônico (*download* na Página Web [http://ead.fieb.org.br/portal\\_faculdades/dissertacoes-e-teses-mcti.html](http://ead.fieb.org.br/portal_faculdades/dissertacoes-e-teses-mcti.html) ou solicitação via e-mail à secretaria do programa) e em formato impresso somente para consulta.

Ressalta-se que o formato proposto considera diversos itens das normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), entretanto opta-se, em alguns aspectos, seguir um estilo próprio elaborado e amadurecido pelos professores do programa de pós-graduação supracitado.

Faculdade de Tecnologia SENAI CIMATEC


**Mestrado Acadêmico em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial**

A Banca Examinadora, constituída pelos professores abaixo listados, aprova a Defesa de Mestrado, intitulada "**Transmissão de dados em fibras óticas através do momento angular orbital da luz**", apresentada no dia 05 de fevereiro de 2015, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial.

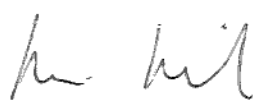
Orientador:

  
Prof. Dr. Pablo Vaveliuk

Membro Interno:

  
Prof. Dr. Marcelo Albano Moret Simões Gonçalves  
SENAI CIMATEC

Membro Externo:

  
Prof. Dr. Denis Gilbert Francis David  
UFBA

# Resumo

Fibras óticas são estruturas utilizadas para transportar ondas eletromagnéticas entre dois pontos do espaço. Sua principal aplicação é a transmissão de dados em alta velocidade entre grandes distâncias. Devido a sua grande capacidade de transmissão de dados a espinha dorsal da internet é totalmente composta por fibras óticas. Como cada vez mais, mais pessoas têm acesso a internet, para que não haja perda da banda de comunicação, há uma constante procura no aperfeiçoamento destes dispositivos. Desde métodos de multiplexação à construção de fibras de vários núcleos, diversos artifícios são utilizados para aumentar a taxa de transmissão de dados das fibras óticas. Este trabalho apresenta um estudo da aplicação do Momento Angular Orbital da luz na transmissão de dados em fibras óticas.

A utilização do Momento Angular Orbital da luz na transmissão de dados em fibras óticas vem ganhando destaque nos últimos anos. Já foi provado que o Momento Angular Orbital da luz representa um novo grau de liberdade ortogonal na transmissão de dados. Além disso, teoricamente, o número de estados portadores de Momento Angular Orbital é infinito o que possibilita um aumento teórico infinito na taxa de transmissão de dados, contudo, existe uma limitação experimental na geração desses feixes.

Este trabalho apresenta um estudo de duas fibras capazes de transportar Momento Angular Orbital. Uma das fibras, aqui denominada de *hyper-fiber*, possui um índice de refração de perfil hiperbólico e a outra, chamada de *vortex-fiber*, é modelada a partir de um artigo que apresenta resultados experimentais. A solução geral da equação de Helmholtz vetorial da *hyper-fiber* é obtida. Esta solução é descrita por duas funções especiais: a função Hipergeométrica do segundo tipo e o polinômio de Laguerre generalizado. Ambas as funções são empregadas para descrever fenômenos óticos, mas elas ainda não foram analisadas conjuntamente neste tipo de fibra. O modelo algébrico da *vortex-fiber* foi desenvolvido com o objetivo principal de se poder comparar as duas fibras. A análise das fibras contempla a avaliação da região de convergência das funções, o estudo do perfil de intensidade e uma estimativa da taxa de transmissão de dados.

# Abstract

Optical fibers are structures used to transport electromagnetic waves through two points in space. They are mainly used for high speed data transmission in long distances and due their high transmission band, fiber optics compose the internet backbone. As more and more people have internet access, to avoid losing communication band, these devices are constantly being optimized. From signal multiplexing methods to multiple cores fibers construction techniques, many different approaches are used to increase data transmission rate. This work study the Orbital Angular Momentum of light in fiber optics data transmission.

The data transmission through Orbital Angular Momentum of light is in the spotlight for the optical scientific group. Many papers were published in the last years and the interest in this physical quantity keeps growing. It has been proved that the Orbital Angular Momentum of light is a new orthogonal degree of freedom in data transmission. Besides that, the number of states that could carry Orbital Angular Momentum is theoretically infinity. This lack of limit allows an unbound growth in data transmission, however, experimental limitations for the generation of these beams still need to be overcome.

This work presents a study of two optical fibers capable of data transmission through Orbital Angular Momentum of light. One of these fibers, named hyper-fiber, has a parabolic refractive index and the other one, called vortex-fiber, was modeled from results of an experimental work. The general solution of the hyper-fiber Helmholtz equation is found. This solution is described by two special functions: the hypergeometric function of the second kind and the generalized Laguerre polynomials. Both functions are commonly used to describe optical phenomena but they were never used in this particular application. The vortex-fiber algebraic model was developed to compare both fibers. Their analysis include the study of the convergence region, intensity profile and data transmission estimation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Definição do Problema . . . . .	1
1.2	Objetivo . . . . .	2
1.3	Importância da Pesquisa . . . . .	2
1.4	Organização da Dissertação de Mestrado . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Embasamento Teórico</b>	<b>4</b>
2.1	Equações de Maxwell . . . . .	4
2.2	Equação de Helmholtz . . . . .	5
2.3	Momento da Luz . . . . .	6
2.3.1	Momento Linear . . . . .	6
2.3.2	Momento Angular <i>Spin</i> . . . . .	7
2.3.3	Momento Angular Orbital . . . . .	7
2.4	Fibras óticas . . . . .	8
2.4.1	Atenuação e Dispersão . . . . .	8
<b>3</b>	<b>A <i>Hyper-Fiber</i></b>	<b>10</b>
3.1	Solução da Equação de Helmholtz . . . . .	11
3.2	Análise de Convergência . . . . .	14
3.3	Equação de Dispersão . . . . .	16
3.3.1	Solução Hipergeométrica . . . . .	17
3.3.2	Solução Laguerre . . . . .	18
3.3.3	Análise dos Resultados . . . . .	20
3.4	Perfil de Intensidade . . . . .	20
3.4.1	Perfil Hipergeométrico . . . . .	20
3.4.2	Perfil Laguerre . . . . .	21
3.4.3	Análise dos Resultados . . . . .	22

3.5	Taxa de Transmissão de Dados . . . . .	24
3.5.1	Tempo de propagação . . . . .	24
3.5.2	Solução Hipergeométrica . . . . .	25
3.5.3	Solução Laguerre . . . . .	26
3.5.4	Análise dos Resultados . . . . .	26
<b>4</b>	<b>A Fibra Vortex</b>	<b>30</b>
4.1	Propriedades da Fibra Vórtex . . . . .	30
4.2	Solução da Equação de Helmholtz . . . . .	32
4.3	Equação de Dispersão . . . . .	38
4.4	Taxa de Transmissão de Dados . . . . .	41
4.4.1	Constante de Propagação e a Taxa de Transmissão . . . . .	41
4.4.2	Curva de Dispersão . . . . .	41
4.4.3	Taxa de Transmissão . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>44</b>
5.1	Conclusões . . . . .	44
5.2	Atividades Futuras de Pesquisa . . . . .	45
	<b>Referências</b>	<b>48</b>
	<b>Apêndice A - Funções Especiais</b>	<b>51</b>



# Lista de Tabelas

3.1	Valores usuais das constantes do índice de refração e do comprimento de onda utilizados na avaliação da equação de dispersão das soluções hipergeométrica e Laguerre. . . . .	17
3.2	Valores das constantes das equações 3.29 e 3.31 utilizados na avaliação do tempo de propagação das soluções hipergeométrica e Laguerre. . . . .	27
4.1	Índice de refração em função do raio ( $r$ em $10^{-6}$ m) . . . . .	31
4.2	Constantes da equação 4.1. . . . .	32
4.3	Constantes que delimitam os limites do índice de refração da equação 4.9. .	35

# Lista de Figuras

2.1	Atenuação de uma fibra de sílica. O menor valor da atenuação é $0,25dB/km$ e ocorre para $\lambda = 1550nm$ . Fonte: (THYAGARAJAN; GHATAK, 2007) . . .	9
3.1	Índice de refração hiperbólico. . . . .	11
3.2	Gráfico de $\beta_h$ em função de $m$ . Para um valor de $p_h$ constante, quanto maior o valor de $m$ , $\beta$ se aproxima de $k$ , ou seja, $m \rightarrow +\infty \Rightarrow \beta \rightarrow k$ . Os valores válidos de $\beta$ são representados em linha cheia. . . . .	17
3.3	Gráfico de $\beta_h$ em função de $p_h$ . Para um valor de $m$ constante, quanto menor o valor de $p_h$ , $\beta_h$ se aproxima de $k$ , ou seja, $p_h \rightarrow -\infty \Rightarrow \beta_h \rightarrow k$ . Os valores válidos de $\beta$ são representados em linha cheia. . . . .	18
3.4	Gráfico de $\beta_L$ em função de $m$ . Para um valor de $p_L$ constante, quanto maior o valor de $m$ , $\beta$ se aproxima de $k$ , ou seja, $m \rightarrow +\infty \Rightarrow \beta \rightarrow k$ . Os valores válidos de $\beta$ são representados em linha cheia. . . . .	19
3.5	Gráfico de $\beta_L$ em função de $p_L$ . Para um valor de $m$ constante, quanto maior o valor de $p_L$ , $\beta_L$ se aproxima de $k$ , ou seja, $p_L \rightarrow +\infty \Rightarrow \beta_L \rightarrow k$ . Os valores válidos de $\beta$ são representados em linha cheia. . . . .	19
3.6	Perfil de intensidade da solução hipergeométrica para $p = -4$ e $m = 6$ . As regiões mais claras apresentam maior intensidade. . . . .	21
3.7	Perfil de intensidade da solução Laguerre para $p = 4$ e $m = 6$ . As regiões mais claras apresentam maior intensidade. . . . .	21
3.8	Perfil de intensidade da solução Laguerre para $m = 5$ e diversos valores de $p$ . O parâmetro $p$ define o número de picos de intensidade de acordo com a equação 3.24. . . . .	23
3.9	Perfil de intensidade da solução Hipergeométrica para $p = -6$ e diversos valores de $m$ . Para um mesmo valor de $p$ , quanto maior a carga topológica, $m$ , maior o espaçamento entre os picos de intensidade. . . . .	24
3.10	Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano para solução hipergeométrica em função de $m$ e $p$ . O limite mínimo para o tempo de propagação é de $3,33 \times 10^{-6}$ . . . . .	27
3.11	Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano para solução Laguerre em função de $m$ e $p$ . O limite mínimo para o tempo de propagação é de $3,33 \times 10^{-6}$ . . . . .	28

3.12	Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano multimodo para solução hipergeométrica em função de $m$ e $p$ . . . . .	29
3.13	Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano multimodo para solução Laguerre em função de $m$ e $p$ . . . . .	29
4.1	Índice de refração da fibra vórtex em função do raio. Fonte: (BOZINOVIC et al., 2013). . . . .	31
4.2	Perspectiva transversal da fibra vortex. Regiões mais claras possuem maior índice de refração. Fonte: (BOZINOVIC et al., 2013). . . . .	31
4.3	Representação gráfica do modelo algébrico do índice de refração da fibra vórtex ( $r$ em $10^{-6}$ m) . . . . .	32
4.4	Representação gráfica da variação do índice de refração em função do raio da fibra. Equação 4.9. O valor de referência do índice de refração é nulo, ( $n_0 = 0$ ). . . . .	34
4.5	Limites entre as três regiões do índice eficaz da fibra vórtex definidas pelas constantes $R_1$ e $R_2$ . ( $n_0 = 0$ e $r$ em $10^{-6}$ m) . . . . .	35
4.6	Valores do índice eficaz nas três regiões da fibra vórtex. ( $n_0 = 0$ e $r$ em $10^{-6}$ m) . . . . .	36
4.7	Curva de dispersão. Descreve a relação da constante de propagação $\beta$ em função do número de onda $k$ . A reta vertical representa o valor do número de onda $k$ utilizado no artigo de referência, (BOZINOVIC et al., 2013) . . .	42

# Lista de Siglas

ABNT .....	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ED .....	Equação Diferencial
EDO .....	Equação Diferencial Ordinária
EM .....	Eletro-magnetismo
ML .....	Momento Linear
MAO .....	Momento Angular Orbital
MAS .....	Momento Angular Spin
PPGMCTI ..	Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional e Tecnologia Industrial
UFRJ .....	Universidade Federal do Rio de Janeiro
WWW .....	World Wide Web

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Definição do Problema

Além do momento linear, as ondas eletromagnéticas podem carregar momento angular. Por sua vez, o momento angular pode ser separado em *spin* e momento angular orbital (MAO).

Há um grande interesse da comunidade científica em entender como feixes com MAO são gerados, transmitidos e detectados, principalmente porque eles possuem propriedades que permitem aumentar a transmissão de dados em fibras óticas.

O estudo dessa propriedade vem recebendo financiamento de órgãos governamentais, a exemplo do projeto de pesquisa *Phorbitech*. Este projeto reuniu seis universidades Européias e a UFRJ para estudar a geração, manipulação, transmissão e detecção de feixes com MAO. Sozinho este grupo foi responsável pela publicação de 120 trabalhos científicos entre os anos de 2010 e 2013.

O MAO é considerado um grau de liberdade ortogonal na multiplexação de dados e sua utilização na transmissão de dados em fibras óticas foi estudada em, ([BERNARDO; MORAES, 2011](#)), ([BOZINOVIC; KRISTENSEN; RAMACHANDRAN, 2011](#)), ([BOZINOVIC et al., 2013](#)). Quando  $N$  feixes com MAO são multiplexados em uma fibra, a eficiência espectral aumenta  $N$  vezes. Essa capacidade pode ser ainda maior, alcançando  $2N$  se a polarização também for multiplexada, ([BOZINOVIC et al., 2013](#)).

Além do grande interesse comercial existem um grande interesse científico no estudo do MAO. Esta propriedade é encontrada em ondas eletromagnéticas e em fótons. E o entendimento dessa propriedade pode estreitar a relação entre o electromagnetismo e a mecânica quântica.

## 1.2 Objetivo

A presente dissertação de mestrado apresenta um estudo sobre dois tipos de fibras óticas e desenvolve para cada uma delas um modelo de propagação de ondas eletromagnéticas portadoras de momento angular orbital.

Uma das fibras possui índice de refração de perfil hiperbólico. Ela foi anteriormente estudada em (BERNARDO; MORAES, 2011) e neste trabalho ela será denominada de *hyper-fiber*.

A outra fibra, denominada de *vortex fiber*, foi inicialmente estudada em (BOZINOVIC; KRISTENSEN; RAMACHANDRAN, 2011). Alguns resultados experimentais foram obtidos desta fibra, mas nenhum modelo algébrico da propagação de ondas eletromagnéticas foi encontrado. Devido à grande variação de seu índice de refração, o presente trabalho aproxima o índice da fibra vórtex, por um índice de fibras de múltiplas coberturas, *multiple-claddings*.

Além do desenvolvimento dos modelos de propagação, este trabalho se propõe a analisar a taxa de transmissão de dados através de cada uma dessas fibras, não abordando a geração e medição dos feixes portadores de MAO.

## 1.3 Importância da Pesquisa

As fibras óticas são guias de onda que permitem a transmissão de dados em banda larga através de longas distâncias. Por esse motivo, a espinha dorsal da internet é totalmente composta por fibras óticas e a medida que o consumo de banda aumenta, novas conexões são feitas e fibras de maior capacidade substituem outras de menor capacidade.

Para suprir essa demanda cada vez maior, diversas técnicas são utilizadas para aumentar a capacidade de transmissão de dados, dentre elas pode-se citar, as técnicas de modulação do sinal luminoso, geração de feixes "monocromáticos", desenvolvimento de fibras de diversos núcleos, etc.

É teorizado que o MAO de ondas eletromagnéticas permite a transmissão de um número infinito de feixes no mesmo canal de comunicação. Isto aumentaria indefinidamente a taxa de transmissão de dados em uma única fibra. Diversos estudos experimentais já comprovaram que este fenômeno acontece para um número pequeno de feixes. Contudo, ainda não existe um modelo bem definido de fibra para a transmissão desses feixes e também não se conhece as limitações experimentais desta técnica. Logo, o presente trabalho favorece o desenvolvimento de uma tecnologia de grande interesse comercial.

Do ponto de vista científico, o entendimento da transmissão de feixes portadores de MAO estreita a relação entre o electromagnetismo e a mecânica quântica, visto que o MAO da luz é uma grandeza aditiva, presente em ambos os paradigmas.

## 1.4 Organização da Dissertação de Mestrado

Esta dissertação apresenta cinco capítulos e está organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1 - Introdução:** este capítulo apresenta o trabalho, descrevendo o problema, objetivos principais e a estrutura do texto.
- **Capítulo 2 - Embasamento Teórico:** apresenta um breve embasamento teórico com os conceitos do eletro-magnetismo necessários ao entendimento do trabalho. O principal objetivo deste capítulo é o de demonstrar a linha de raciocínio utilizada para se chegar aos modelos matemáticos das fibras estudadas.
- **Capítulo 3 - A *Hyper-Fiber*:** este capítulo apresenta a estrutura da *hyper-fiber* e o modelo matemático de propagação de ondas eletro-magnéticas portadoras de MAO. Avalia-se também a taxa de transmissão de dados para as soluções encontradas.
- **Capítulo 4 - A Fibra Vortex:** descreve como a estrutura da fibra vórtex foi modelada matematicamente e apresenta o modelo de propagação de ondas eletro-magnéticas portadoras de MAO. A taxa de transmissão de dados desta fibra é avaliada de forma numérica.
- **Capítulo 5 - Considerações Finais:** como algumas considerações foram realizadas nos capítulos anteriores, o capítulo final compara os resultados dos modelos, apresentar as conclusões e cita possíveis melhorias no trabalho.

## Capítulo 2

# Embasamento Teórico

### 2.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell descrevem as interações eletromagnéticas, definindo o comportamento do campo elétrico e do campo magnético no espaço e no tempo.

$$\vec{E} = E(\vec{r}, t) \quad (2.1a)$$

$$\vec{H} = H(\vec{r}, t) \quad (2.1b)$$

As equações de Maxwell podem ser escritas na forma integral ou na forma diferencial. A forma integral das equações de Maxwell quantifica grandezas físicas em regiões do espaço. Já a forma diferencial permite avaliar essas grandezas de forma pontual. Além disso, através da forma diferencial é possível simular as interações dos campos eletromagnéticos em mudanças de meios, pois a permissividade e a permeabilidade também são definidas de forma pontual.

Como este trabalho procura obter as soluções de propagação de ondas no interior de fibras óticas, apenas as equações de Maxwell na forma diferencial serão utilizadas, [2.2](#).

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \rho \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0 \quad (2.2b)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.2c)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} \quad (2.2d)$$

Uma das consequências das equações de Maxwell é que a análise feita para o campo



elétrico também é válida para o campo magnético. Logo, por simplicidade, apenas as soluções para o campo elétrico serão apresentadas.

## 2.2 Equação de Helmholtz

A equação de onda, ou equação de Helmholtz, descreve a propagação das ondas eletromagnéticas. Ela é obtida a partir das equações de Maxwell supondo que o espaço é livre de cargas ( $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ ).

Aplicando o rotacional na equação 2.2d e supondo que a permeabilidade magnética do meio  $\mu$  é invariante no tempo e espaço:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \vec{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Sabe-se que a propriedade 2.4 do Laplaciano é válida.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (2.4)$$

A partir das equações 2.3, 2.4 e 2.2c obtém-se:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \mu \frac{\partial \nabla \times \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

A equação de Helmholtz é válida para campos elétricos e campos magnéticos. Para o caso em que a permissividade elétrica é invariante no tempo e espaço o divergente do campo elétrico é nulo e obtém-se as equações 2.6.

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6a)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6b)$$

Neste trabalho a permissividade elétrica é sempre invariante no tempo. As equações 2.6 foram obtidas supondo que a permissividade também é invariante no espaço, contudo, esta aproximação não será considerada em análises futuras. Como a permissividade elétrica é a grandeza que define o índice de refração de um meio, ela não será considerada invariante no espaço no estudo da **hyper-fiber**, pois esta fibra apresenta no seu interior um índice hiperbólico em função do raio.

## 2.3 Momento da Luz

O momento é uma grandeza facilmente observável em objetos massivos, contudo ela é pouco intuitiva quando relacionada às ondas eletromagnéticas. Essa dificuldade pode ser explicada por sua origem na mecânica clássica, durante o desenvolvimento das três leis de Newton. Além disso o pequeno valor da intensidade da radiação de pressão dificulta a sua observação em fenômenos macroscópicos.

Os principais artigos que demonstraram a propagação de momento por ondas eletromagnéticas são relativamente recentes, datando do século XX. Em 1901, (NICHOLS; HULL, 1901) demonstrou que a luz pode transmitir momento linear, em 1936, (BETH, 1936) demonstrou que a luz pode transmitir momento angular e em 1992, (ALLEN et al., 1992) demonstrou a existência do momento angular orbital da luz. Por ser uma área relativamente recente, ainda se espera que muitas descobertas sejam feitas.

O momento pode ser subdividido em três; o momento linear e momento angular *spin* e o momento angular orbital.

- Momento Linear
- Momento Angular *Spin* (MAS)
- Momento Angular Orbital (MAO)

Quando se refere a ondas eletromagnéticas o momento recebe outras denominações. O momento angular *spin* também é chamado de polarização. Já feixes de laser dotados de momento angular orbital podem ser chamados de luz torcida ou de vórtice ótico.

O momento é uma grandeza aditiva, ou seja, ela é uma grandeza cujo valor para um sistema de partículas é a resultante dos valores associados a cada partícula, (NUSSENZ-VEIG, 1998). Em outras palavras, o comportamento quântico de uma grandeza aditiva pode ser observado em fenômenos macroscópicos. Esta relação estreita entre o eletromagnetismo e a mecânica quântica existente no momento angular orbital da luz foi citada em (ALLEN et al., 1992).

### 2.3.1 Momento Linear

A existência do momento linear em ondas eletromagnéticas emerge do fenômeno conhecido como radiação de pressão, onde uma onda eletromagnética exerce uma pressão sobre uma superfície absorvente. A existência de momento em fótons é um fenômeno pouco intuitivo visto que os fótons não possuem massa de repouso. A relação entre energia  $E$  e momento linear  $p$  é dada por, 2.7, onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

$$E = pc \tag{2.7}$$

### 2.3.2 Momento Angular *Spin*

O momento angular *spin* também é chamado de polarização. A polarização existe porque a direção de vibração dos campos elétrico e magnético, podem variar no tempo e espaço. Em ondas planas monocromáticas, esta variação é definida pelos valores da amplitude e da diferença de fase entre as componentes do campo. A polarização pode assumir três formas distintas:

- Polarização Linear
- Polarização Circular
- Polarização Elíptica

As polarizações linear e circular são casos especiais da polarização elíptica.

A polarização de um feixe que se propaga na direção  $z$  é associada ao *spin* de seus fótons pela equação 2.8.

$$J_z = \pm \hbar \quad (2.8)$$

$J_z$  é o momento angular do fóton ao longo da direção  $z$  e  $\hbar$  é a constante de Planck definida por 2.9.

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s} \quad (2.9)$$

### 2.3.3 Momento Angular Orbital

O momento angular orbital, define a distribuição espacial do raio luminoso. Precisamente, o MAO define um feixe de formato helicoidal, matematicamente representado por  $\exp(im\phi)$ , onde  $m$  é uma constante chamada de carga topológica e  $\theta$  é o ângulo azimutal.

O feixe helicoidal pode ser visualizado como um raio de luz paraxial com um vórtex ótico no centro. Em coordenadas cilíndricas e notação complexa de um feixe helicoidal que se propaga na direção  $z_+$  pode ser expresso por 2.10.

$$f(\rho, \phi, z) = A(\rho)e^{im\phi}e^{-i\beta z} \quad (2.10)$$

A carga topológica  $m$  deve assumir valores inteiros, e é ela que define a distribuição espacial do feixe. Teoricamente,  $m$  pode assumir qualquer valor inteiro o que implica em uma quantidade infinita de feixes portadores de MAO. Na prática, a utilização desses feixes é limitada pelos aparatos que o geram. E, durante o desenvolvimento deste trabalho,

não foi tomado conhecimento de nenhum experimento realizado no intuito de verificar os limites experimentais da carga topológica.

Do ponto de vista quântico, os feixes com momento angular orbital são formados por fótons com momento definido por 2.11.

$$J_z = m\hbar \tag{2.11}$$

## 2.4 Fibras óticas

As fibras óticas são um tipo especial de guias de onda. Basicamente, as fibras óticas diferem das outras guias de onda por causa do formato cilíndrico e de serem especializadas na transmissão de feixes de luz.

As fibras óticas de sílica são o mais importante meio de transmissão de dados entre longas distâncias, o que é devido principalmente a baixa atenuação e dispersão do sinal transmitido, (OKAMOTO, 2006). Um exemplo da baixa atenuação na transmissão de dados pode ser observado em (YOKOTA et al., 1986), que demonstrou uma atenuação de  $0,154dB/m$  na transmissão de uma onda de  $\lambda = 1,55\mu m$ .

As fibras óticas são subdivididas em grupos definidos pelo perfil do índice de refração do camada mais interna, o *core*. As mais conhecidas são as fibras do tipo degrau e gradual.

### 2.4.1 Atenuação e Dispersão

Em sistemas de comunicação digital a informação transmitida através de fibras óticas é codificada em pulsos luminosos. Desta forma, a capacidade de transmissão de dados das fibras óticas é medida através de duas grandezas: a perda(atenuação) da energia do pulso e a dispersão do pulso, (THYAGARAJAN; GHATAK, 2007).

A perda, ou atenuação, é o fenômeno que representa a diminuição da intensidade luminosa a medida que o pulso se propaga ao longo de uma fibra ótica. A figura 2.1 representa uma curva típica da atenuação de uma fibra de sílica. A menor atenuação,  $0,25 dB/km$ , ocorre para um comprimento de onda de  $1550 nm$ .

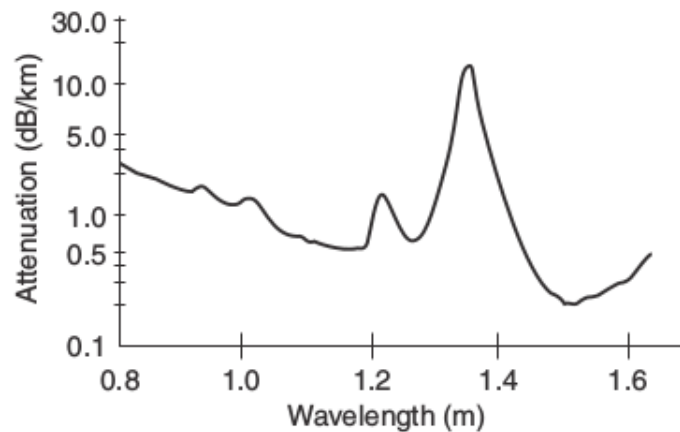


Figura 2.1: Atenuação de uma fibra de sílica. O menor valor da atenuação é  $0,25\text{dB}/\text{km}$  e ocorre para  $\lambda = 1550\text{nm}$ . Fonte: (THYAGARAJAN; GHATAK, 2007)

A dispersão dos pulsos representa o aumento na largura do pulso, a medida que ele é transmitido. Se a largura dos pulsos aumenta, o tempo de transmissão entre os pulsos deve ser suficientemente grande para que os mesmos não se superponham. Logo, quanto maior a dispersão menor será a taxa de transmissão de dados.

As principais causas da dispersão dos pulsos luminosos são:

- um pulso contém vários feixes de luz que se propagam por diferentes caminhos óticos, conseqüentemente, cada feixe possui um tempo de viagem diferente. Esse fenômeno é conhecido por dispersão intermodal.
- como não existe uma fonte luminosa perfeitamente monocromática, um pulso luminoso é composto por um intervalo de comprimentos de onda. E como o índice de refração do material depende do comprimento de onda do sinal, ao longo do mesmo caminho, diferentes comprimentos de onda possuem tempos de propagação diferente. Este fenômeno é conhecido como dispersão do material.

## Capítulo 3

### *A Hyper-Fiber*

A guia de onda com índice de refração hiperbólico estudada neste trabalho também foi estudada em (BERNARDO; MORAES, 2011). Esta guia pode transmitir feixes com MAO, que, em teoria, permitiria a transmissão de um número infinito de feixes com diferentes cargas topológicas, ( $m$ ). Essa característica dos feixes com MAO proporcionaria um aumento considerável da taxa de transmissão de dados em fibras óticas, por isso, há um grande interesse no estudo e desenvolvimento de fibras para a propagação desses feixes. Em (BOZINOVIC et al., 2013), apesar da fibra utilizada não possuir índice de perfil hiperbólico, foram apresentados resultados experimentais que corroboram com a expectativa de aumento da taxa de transferência de dados.

Este estudo foi realizado porque não existe um modelo algébrico bem definido de fibras com índice de refração de perfil hiperbólico. Durante o desenvolvimento deste trabalho algumas observações importantes foram feitas quando o modelo de (BERNARDO; MORAES, 2011) foi comparado com o modelo desenvolvido.

O perfil do índice de refração hiperbólico estudado é definido pela equação 3.1. A constante  $n_0$  é o índice de refração quando  $r \rightarrow \infty$ , e  $n_1$  é um parâmetro da fibra que possui dimensão espacial.

$$\eta^2 = n_0^2 \left( 1 + \frac{n_1}{n_0 r} \right) \quad (3.1)$$

Neste trabalho chamaremos de **Hyper-Fiber** a guia de onda com índice de refração hiperbólico definido pela equação 3.1.

A figura 3.1 apresenta a variação do índice de refração da guia de onda em função do raio. A medida que o raio aumenta o índice de refração se aproxima do valor de  $n_0$  e a medida que o valor do parâmetro  $n_1$  aumenta a inclinação da curva aumenta.

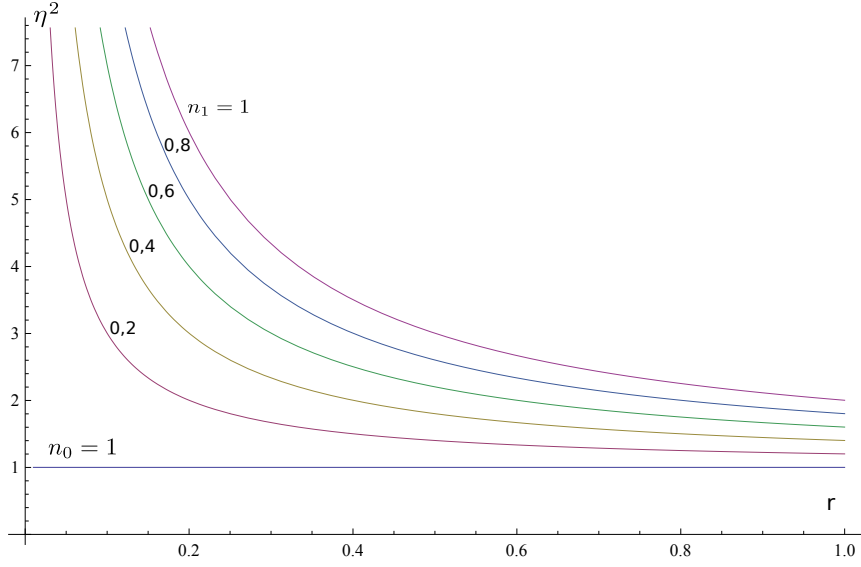


Figura 3.1: Índice de refração hiperbólico.

O trabalho de (BERNARDO; MORAES, 2011) também apresenta uma técnica para construção da fibra definida pela equação 3.1. Segundo o autor, o núcleo da fibra deve ser constituído por um material opaco, para não haver propagação de ondas EM no centro da fibra. E ao redor desta região opaca a fibra pode ser construída por vidro de sílica dopado com dióxido de Germânio. A dopagem deve ser feita com simetria cilíndrica e sua concentração deve diminuir a medida que o raio da fibra aumenta.

### 3.1 Solução da Equação de Helmholtz

Supondo que os campos elétrico e magnético variam harmonicamente no tempo, obtém-se a equação de propagação da onda no interior da guia.

$$\vec{E} = E(\vec{r}, t) = E(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (3.2)$$

Substituindo 3.2 na equação de Helmholtz 2.6a e derivando a equação no tempo, obtém-se 3.3.

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \quad (3.3)$$

A partir da definição da permeabilidade magnética,  $\mu$ , e da permissividade elétrica  $\epsilon$  obtém-se 3.4.

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (3.4)$$

A permeabilidade magnética no vácuo e a permissividade elétrica no vácuo estão relacionadas com a velocidade da luz no vácuo,  $c$ , por 3.5.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (3.5)$$

Substituindo 3.5 em 3.4 obtém-se 3.6.

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2 \mu_r \varepsilon_r}{c^2} \vec{E} = 0 \quad (3.6)$$

Neste trabalho considera-se que a permeabilidade magnética relativa é sempre igual a 1,  $\mu_r = 1$ . Como  $\varepsilon_r = \eta^2$ , obtém-se:

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2 \eta^2}{c^2} \vec{E} = 0 \quad (3.7)$$

O índice de refração  $\eta$  é dado pela expressão 3.1.

Adotando-se o número de onda do feixe incidente como 3.8, obtém-se 3.9.

$$k = \frac{\omega n_0}{c} \quad (3.8)$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \left( 1 + \frac{n_1}{n_0 r} \right) \vec{E} = 0 \quad (3.9)$$

A equação 3.9 é a equação de onda para a propagação de ondas eletromagnéticas em guias com índice de refração de perfil hiperbólico. Para se obter essa equação algumas considerações foram feitas para reduzir a complexidade do problema. As mais importantes considerações foram: o divergente do campo elétrico é nulo,  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , e a permeabilidade magnética relativa é constante e unitária.  $\mu_r = 1$ .

Em coordenadas cilíndricas as componentes espaciais do campo elétrico são dadas por:

$$\vec{E} = E_r \hat{\rho} + E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{z}$$

Adotando-se o eixo  $z$  como eixo de propagação da onda e supondo que a mesma possui momento angular orbital, cada componente espacial apresenta a forma definida em 3.10.  $\beta$  é número de onda paralelo a direção de propagação e  $m$  é a grandeza que define o Momento Angular Orbital.  $m$  é chamada de carga topológica.



$$E_r(r, \phi, z) = A_r(r) e^{im\phi} e^{-i\beta z} \quad (3.10a)$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = A_\phi(r) e^{im\phi} e^{-i\beta z} \quad (3.10b)$$

$$E_z(r, \phi, z) = A_z(r) e^{im\phi} e^{-i\beta z} \quad (3.10c)$$

De acordo com (OKAMOTO, 2006), em guias de onda cilíndricos com simetria axial onde o índice de refração depende somente do raio,  $\eta(r)$ , a componente z dos campos elétrico e magnético descrevem completamente a propagação das ondas EM. As componentes transversais, 3.11, são obtidas das componentes longitudinais  $E_z$  e  $H_z$ .

$$E_r = -\frac{j}{k^2\eta^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad (3.11a)$$

$$E_\phi = -\frac{j}{k^2\eta^2 - \beta^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (3.11b)$$

$$H_r = -\frac{j}{k^2\eta^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega\varepsilon_0\eta^2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \quad (3.11c)$$

$$H_\phi = -\frac{j}{k^2\eta^2 - \beta^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \omega\varepsilon_0\eta^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (3.11d)$$

Após a aplicação do Laplaciano na equação de Helmholtz 3.9, obtém-se a EDO relacionada a componente z.

$$e^{im\phi} e^{-i\beta z} \left( \left( \beta^2 - k^2 - \frac{n_1 k^2}{n_0 r} + \frac{m^2}{r^2} \right) A_z(r) - \frac{1}{r} A'_z(r) - A''_z(r) \right) = 0 \quad (3.12)$$

Através do *software mathematica* foi possível solucionar a equação diferencial 3.12. A componente longitudinal do campo elétrico é descrita pela equação 3.13

$$E_z(r, \phi, z) = e^{im\phi} e^{-i\beta z} e^{-ir\sqrt{k^2-\beta^2}} r^m \quad (3.13)$$

$$\left( E_1 U \left[ \frac{1}{2} + m + \frac{ik^2 n_1}{2n_0 \sqrt{k^2 - \beta^2}}, 1 + 2m, i2r\sqrt{k^2 - \beta^2} \right] + \right.$$

$$\left. E_2 L \left[ -\frac{1}{2} - m - \frac{ik^2 n_1}{2n_0 \sqrt{k^2 - \beta^2}}, 2m, i2r\sqrt{k^2 - \beta^2} \right] \right)$$

Onde  $U$  é a função hipergeométrica confluyente do segundo tipo, e  $L$  é o polinômio de Laguerre generalizado.

A notação usual do polinômio de Laguerre generalizado é da forma  $L_n^a(x)$ , contudo, para facilitar a leitura, o mesmo foi reescrito como  $L[n, a, x]$ . Um breve estudo sobre algumas funções especiais é apresentado no [Apêndice A - Funções Especiais](#).

O polinômio generalizado de Laguerre não é citado em (BERNARDO; MORAES, 2011). E até o presente momento esta solução não foi apresentada como sendo uma solução da **hyper-fiber**.

A equação 3.13 pode ser reescrita para eliminar os números complexos, obtendo-se 3.14.

$$E_z(r, \phi, z) = e^{im\phi} e^{-i\beta z} e^{\mp r\sqrt{\beta^2 - k^2}} r^m \quad (3.14)$$

$$\left( E_1 U \left[ \frac{1}{2} + m \mp \frac{k^2 n_1}{2n_0 \sqrt{\beta^2 - k^2}}, 1 + 2m, \pm 2r\sqrt{\beta^2 - k^2} \right] + \right.$$

$$\left. E_2 L \left[ -\frac{1}{2} - m \pm \frac{k^2 n_1}{2n_0 \sqrt{\beta^2 - k^2}}, 2m, \pm 2r\sqrt{\beta^2 - k^2} \right] \right)$$

A ordem dos sinais de 3.14 não pode ser trocada. Os sinais superiores definem uma equação e os inferiores definem outra equação. Ambas as equações fornecem os mesmos resultados, contudo a equação definida pelos sinais superiores será utilizada.

## 3.2 Análise de Convergência

A componente longitudinal da solução da equação de Helmholtz para o campo elétrico, 3.14, apresenta duas funções especiais que definem a amplitude do sinal. Cada uma dessas funções representa uma solução distinta, o que permite a análise de cada uma delas de forma separada.

$$E_z(r, \phi, z) = e^{im\phi} e^{-i\beta z} e^{-r\sqrt{\beta^2 - k^2}} r^m \quad (3.15a)$$

$$E_1 U \left[ \frac{1}{2} + m - \frac{k^2 n_1}{2n_0 \sqrt{\beta^2 - k^2}}, 1 + 2m, 2r\sqrt{\beta^2 - k^2} \right]$$

$$E_z(r, \phi, z) = e^{im\phi} e^{-i\beta z} e^{-r\sqrt{\beta^2 - k^2}} r^m \quad (3.15b)$$

$$E_2 L \left[ -\frac{1}{2} - m + \frac{k^2 n_1}{2n_0 \sqrt{\beta^2 - k^2}}, 2m, 2r\sqrt{\beta^2 - k^2} \right]$$

A partir deste ponto a equação 3.15a será referida como solução hipergeométrica e a solução 3.15b será referida como solução Laguerre. Para entender o comportamento dessas funções é necessário definir o parâmetro  $p$ . Este parâmetro é primeiro argumento da função hipergeométrica e do polinômio de Laguerre, respectivamente, 3.16a e 3.16b.

$$p_h = +\frac{1}{2} + m - \frac{k^2 n_1}{2n_0 \sqrt{\beta^2 - k^2}} \quad (3.16a)$$

$$p_L = -\frac{1}{2} - m + \frac{k^2 n_1}{2n_0 \sqrt{\beta^2 - k^2}} \quad (3.16b)$$

A função hipergeométrica confluyente só existe quando 3.16a pertence ao conjunto dos números inteiros, 3.17a. Já o polinômio generalizado de Laguerre só existe quando 3.16b pertence ao conjunto dos números inteiros não negativos, 3.17b.

$$p_h \in \mathbb{Z} \quad (3.17a)$$

$$p_L \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.17b)$$

As equações 3.17 definem o domínio da função hipergeométrica e dos polinômios de Laguerre, contudo, elas não são condição suficiente para se obter soluções físicas reais para a propagação de ondas na **hyper-fiber**. Na prática, a solução hipergeométrica só vai apresentar estados confinados quando o parâmetro  $p$  pertencer ao conjunto dos números inteiros não positivos.

$$p_h \in \mathbb{Z}_- \quad (3.18a)$$

$$p_L \in \mathbb{Z}_+ \quad (3.18b)$$

As equações 3.18a e 3.18b definem os valores de  $p$  aos quais as soluções hipergeométrica e Laguerre podem ser propagadas na **hyper-fiber**. Além da restrição 3.18, mais duas condições restringem as soluções 3.15. A segunda restrição das soluções é dada por 3.19.

$$\beta > k \quad (3.19)$$

Já a terceira restrição está relacionada com a carga topológica  $m$  de acordo com 3.20.

$$m \geq 0, \forall m \in \mathbb{Z} \quad (3.20)$$

A solução hipergeométrica apresentada em (BERNARDO; MORAES, 2011) apresenta as restrições descritas por 3.18a, 3.19 e 3.20. Contudo a restrição da carga topológica,  $m$ , citada em (BERNARDO; MORAES, 2011) apresenta um limite superior não existente em 3.20.

### 3.3 Equação de Dispersão

A partir das equações 3.16a e 3.16b obtém-se a equação de dispersão para a solução hipergeométrica 3.21a e para a solução Laguerre, 3.21b.

$$\beta_h^2 = k^2 \left( 1 \pm \frac{k^2 n_1^2}{n_0^2 (1 + 2m - 2p_h)^2} \right) \quad (3.21a)$$

$$\beta_L^2 = k^2 \left( 1 \pm \frac{k^2 n_1^2}{n_0^2 (1 + 2m + 2p_L)^2} \right) \quad (3.21b)$$

O sinal positivo das equações 3.21a e 3.21b existe quando  $\beta > k$  e o sinal negativo existe quando  $k > \beta$ . Devido a restrição 3.19, apenas as equações 3.21a e 3.21b com sinal positivo apresentam soluções suportadas pela **hyper-fiber**.

Para avaliar a equação de dispersão de ambas as soluções utilizaremos valores usuais para as constantes da equação do índice de refração, 3.1, e para o comprimento de onda do feixe incidente, 3.8. Os valores estão definidos na tabela 3.1.

$n_0$	$n_1$	$\lambda$
1,5	1,1 $\mu m$	1 $\mu m$

Tabela 3.1: Valores usuais das constantes do índice de refração e do comprimento de onda utilizados na avaliação da equação de dispersão das soluções hipergeométrica e Laguerre.

### 3.3.1 Solução Hipergeométrica

A figura 3.2 mostra o comportamento de  $\beta_h$  para  $p_h = -4$ . A curva é descrita pela equação 3.21a. A medida que o valor da carga topológica,  $m$ , aumenta, o valor de  $\beta_h$  se aproxima de  $k$ . A parte da curva representada em linha cheia destaca os valores válidos de  $\beta$ .

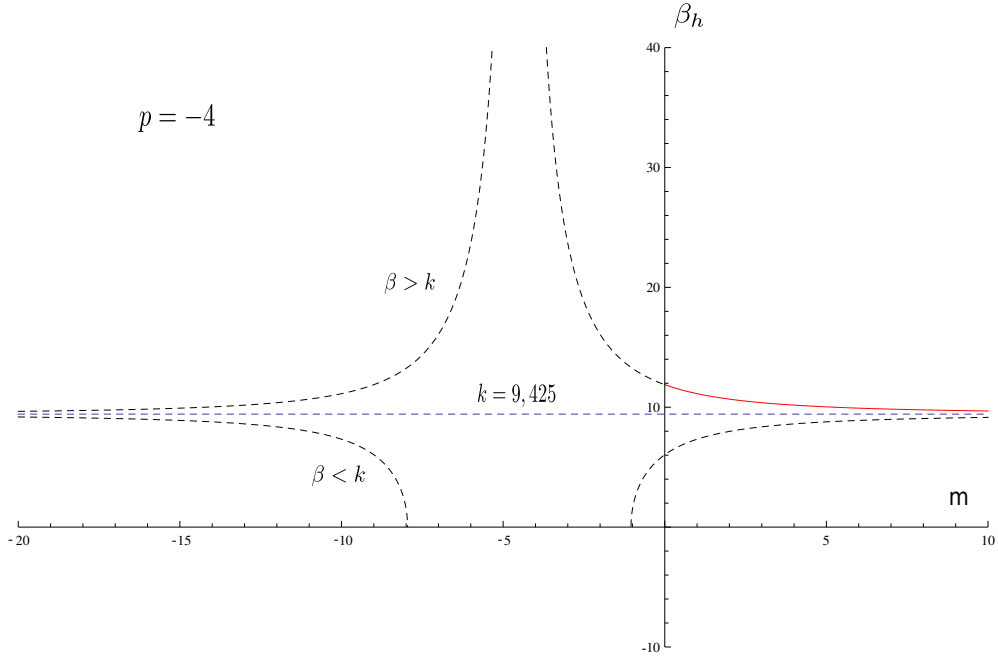


Figura 3.2: Gráfico de  $\beta_h$  em função de  $m$ . Para um valor de  $p_h$  constante, quanto maior o valor de  $m$ ,  $\beta$  se aproxima de  $k$ , ou seja,  $m \rightarrow +\infty \Rightarrow \beta \rightarrow k$ . Os valores válidos de  $\beta$  são representados em linha cheia.

Tomando  $m$  como um valor constante,  $m = 6$ , a medida que  $p$  diminui, o valor de  $\beta_h$  se aproxima do valor de  $k$ .

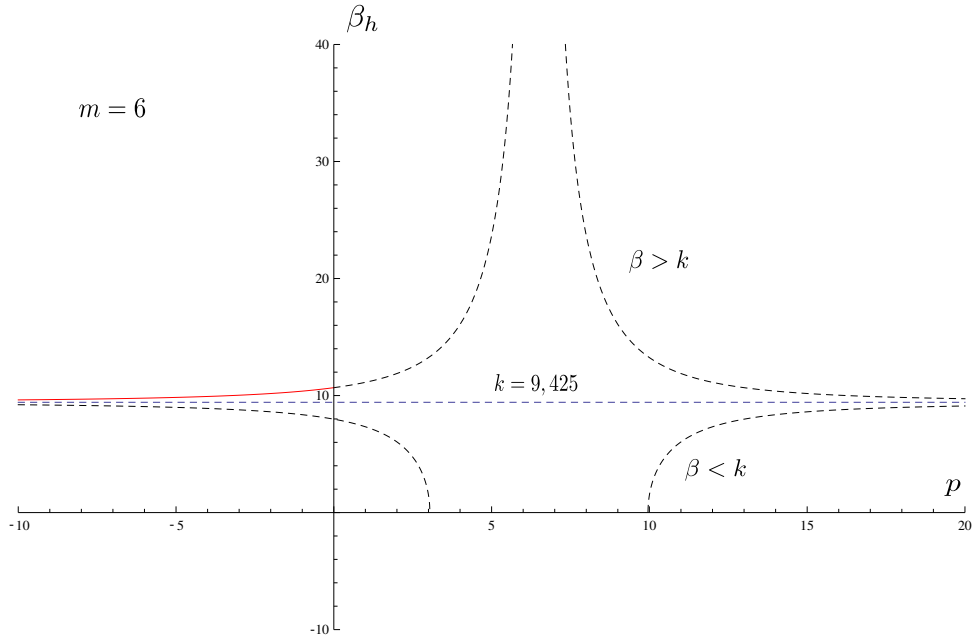


Figura 3.3: Gráfico de  $\beta_h$  em função de  $p_h$ . Para um valor de  $m$  constante, quanto menor o valor de  $p_h$ ,  $\beta_h$  se aproxima de  $k$ , ou seja,  $p_h \rightarrow -\infty \Rightarrow \beta_h \rightarrow k$ . Os valores válidos de  $\beta$  são representados em linha cheia.

### 3.3.2 Solução Laguerre

Para a solução Laguerre, de acordo com 3.17b, o parâmetro  $p_L$  deve ser sempre positivo. A assimetria em  $p$  é a grande diferença entre as soluções hipergeométrica e Laguerre. Observe que a equação de dispersão é idêntica para valores opostos de  $p$ .

A figura 3.4 mostra o comportamento de  $\beta_L$  para  $p_L = 4$ . A curva é descrita pela equação 3.21b. A medida que o valor da carga topológica,  $m$ , aumenta, o valor de  $\beta_L$  se aproxima de  $k$ . A parte da curva representada em linha cheia destaca os valores válidos de  $\beta$ .

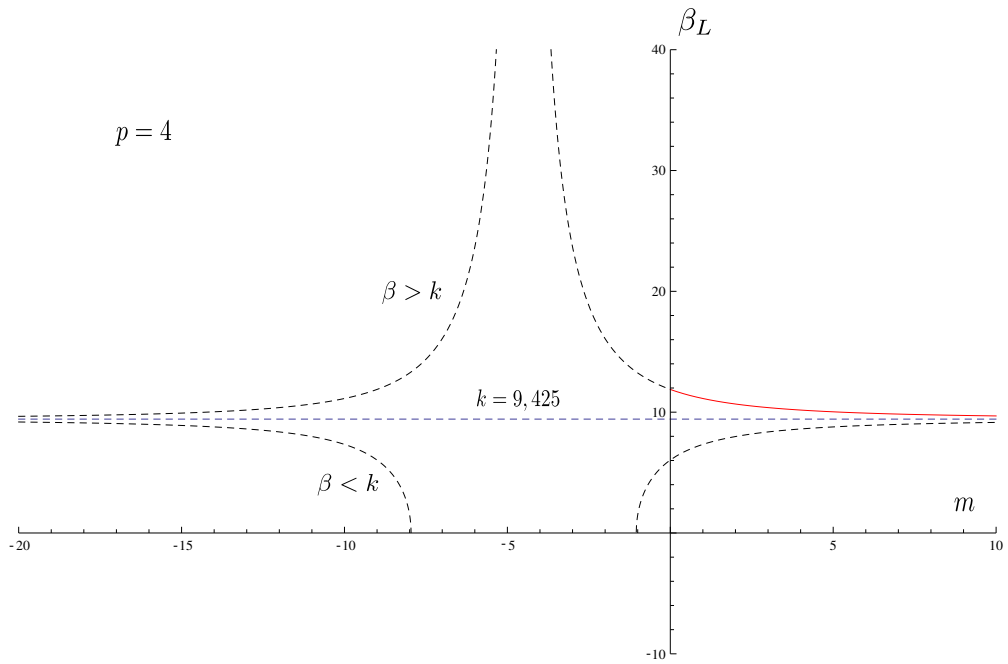


Figura 3.4: Gráfico de  $\beta_L$  em função de  $m$ . Para um valor de  $p_L$  constante, quanto maior o valor de  $m$ ,  $\beta$  se aproxima de  $k$ , ou seja,  $m \rightarrow +\infty \Rightarrow \beta \rightarrow k$ . Os valores válidos de  $\beta$  são representados em linha cheia.

Para  $m$  constante,  $m = 6$ , a medida que  $p_L$  aumenta, o valor de  $\beta_L$  se aproxima do valor de  $k$ .

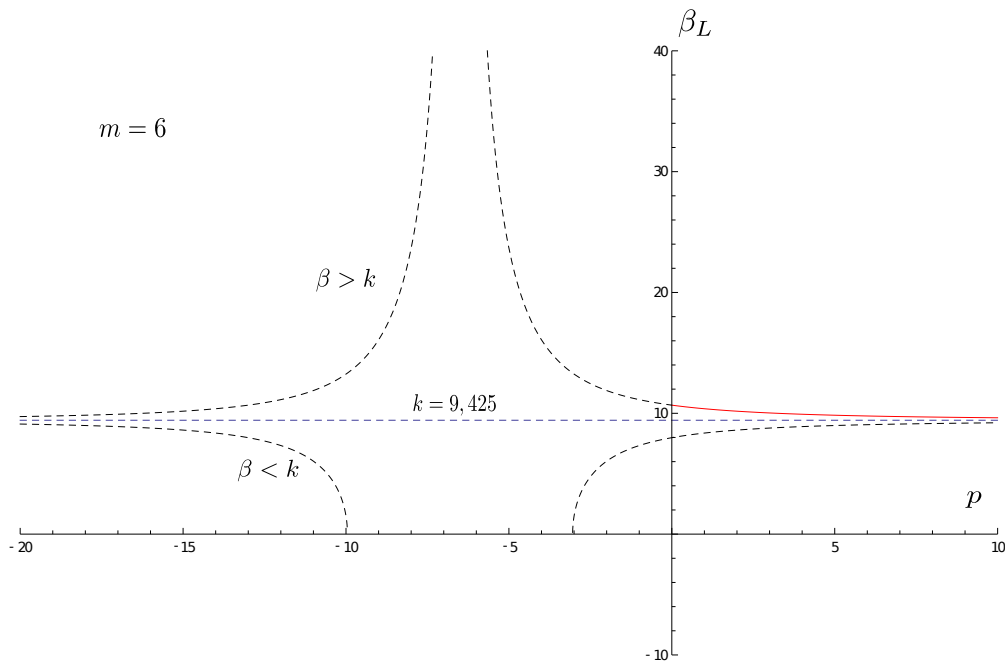


Figura 3.5: Gráfico de  $\beta_L$  em função de  $p_L$ . Para um valor de  $m$  constante, quanto maior o valor de  $p_L$ ,  $\beta_L$  se aproxima de  $k$ , ou seja,  $p_L \rightarrow +\infty \Rightarrow \beta_L \rightarrow k$ . Os valores válidos de  $\beta$  são representados em linha cheia.

### 3.3.3 Análise dos Resultados

As curvas são idênticas para valores de  $p$  opostos,  $p_h = -p_L$ . Já as curvas para  $m$  constante são simétricas em relação ao eixo vertical.

O parâmetro  $p$  relaciona os números de onda  $\beta$  e  $k$  de acordo com 3.16a e 3.16b. Se os valores de  $p$  forem opostos,  $p_h = -p_L$ , e as cargas topológicas forem iguais, os números de onda longitudinais de cada solução serão iguais,  $\beta_h = \beta_L$ . Neste caso, as soluções hipergeométrica e Laguerre apresentam o mesmo valor de  $\beta$ , 3.22. No exemplo anterior, para  $m = 6$ ,  $p_h = -4$  e  $p_L = 4$  os números de onda longitudinais assumem o mesmo valor.

$$\beta_h = \beta_L = 9,922 \times 10^6 \frac{rad}{m} \quad (3.22)$$

## 3.4 Perfil de Intensidade

A intensidade de um feixe luminoso pode ser obtida com o valor do campo elétrico longitudinal,  $E_z$ , de acordo com a equação 3.23.

$$I_{p,m} = |E_z(r, \phi, z)|^2 \quad (3.23)$$

### 3.4.1 Perfil Hipergeométrico

Utilizando os valores da tabela 3.1 e com a ajuda do *software Mathematica* foi possível avaliar graficamente a intensidade do campo elétrico. A figura 3.6 representa a intensidade do campo elétrico em função do raio, para  $E_1 = E_2 = 1$ ,  $p = -4$  e  $m = 6$ . As regiões mais claras possuem maior intensidade.



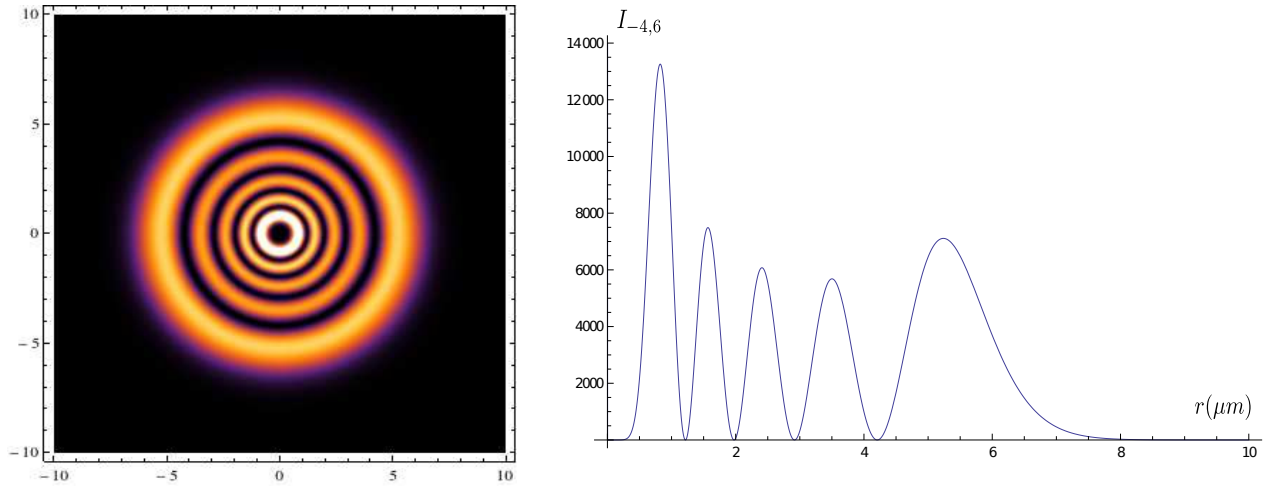


Figura 3.6: Perfil de intensidade da solução hipergeométrica para  $p = -4$  e  $m = 6$ . As regiões mais claras apresentam maior intensidade.

### 3.4.2 Perfil Laguerre

Ainda com os valores da tabela 3.1 é possível representar graficamente a intensidade do campo elétrico da solução Laguerre.

A figura 3.7 foi gerada pelo *software Mathematica*, ela representa a intensidade do campo elétrico, para  $E_1 = E_2 = 1$ ,  $p = 4$  e  $m = 6$ . As áreas mais claras possuem maior intensidade.

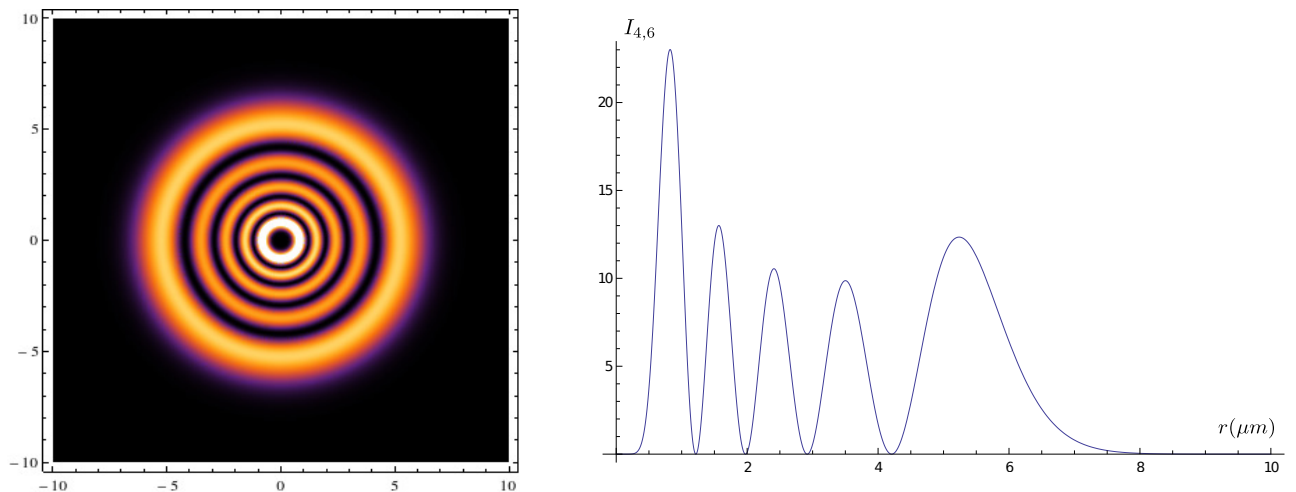


Figura 3.7: Perfil de intensidade da solução Laguerre para  $p = 4$  e  $m = 6$ . As regiões mais claras apresentam maior intensidade.

### 3.4.3 Análise dos Resultados

Pode-se observar nas figuras 3.6 e 3.7 que o perfil de intensidade das soluções hipergeométrica e Laguerre são iguais quando a carga topológica,  $m$ , é a mesma e o parâmetro  $p$  é opostos,  $p_h = -p_L$ . Este resultado já era esperado, pois neste caso, os números de onda longitudinais são iguais, 3.22. Contudo, os valores de amplitude das soluções são diferentes. A solução hipergeométrica apresenta uma amplitude muito maior que a solução Laguerre.

Além da simetria, o parâmetro  $p$  também possui uma relação com o número de anéis ou picos de intensidade,  $N_a$ . Para ambas as soluções o número de anéis do perfil de intensidade é dado por 3.24.

$$N_a = |p| + 1 \quad (3.24)$$

A figura 3.8 apresenta 4 perfis de intensidade da solução Laguerre com diferentes valores do parâmetro  $p$  para um mesmo valor da carga topológica,  $m = 5$ . O mesmo comportamento é observado na solução Hipergeométrica para valores opostos do parâmetro  $p$ .

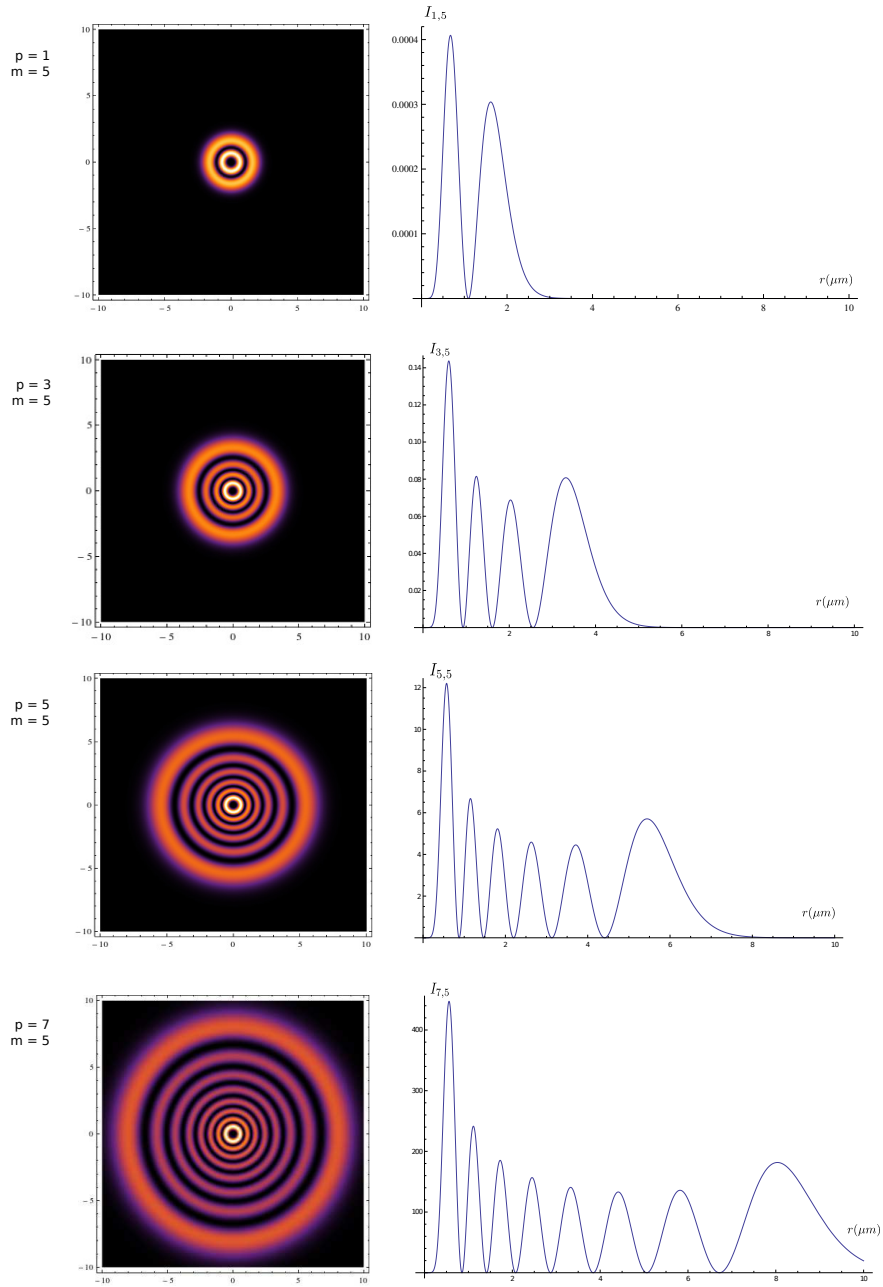


Figura 3.8: Perfil de intensidade da solução Laguerre para  $m = 5$  e diversos valores de  $p$ . O parâmetro  $p$  define o número de picos de intensidade de acordo com a equação 3.24.

Para um mesmo valor de  $p$ , quanto maior a carga topológica,  $m$ , maior é a distância entre os picos de intensidade. A figura 3.9 apresenta 4 perfis de intensidade da solução Hipergeométrica com diferentes valores da carga topológica,  $m$ , para  $p = -6$ . Assim como no caso anterior, o mesmo comportamento é observado na solução Laguerre quando  $p = 6$ .

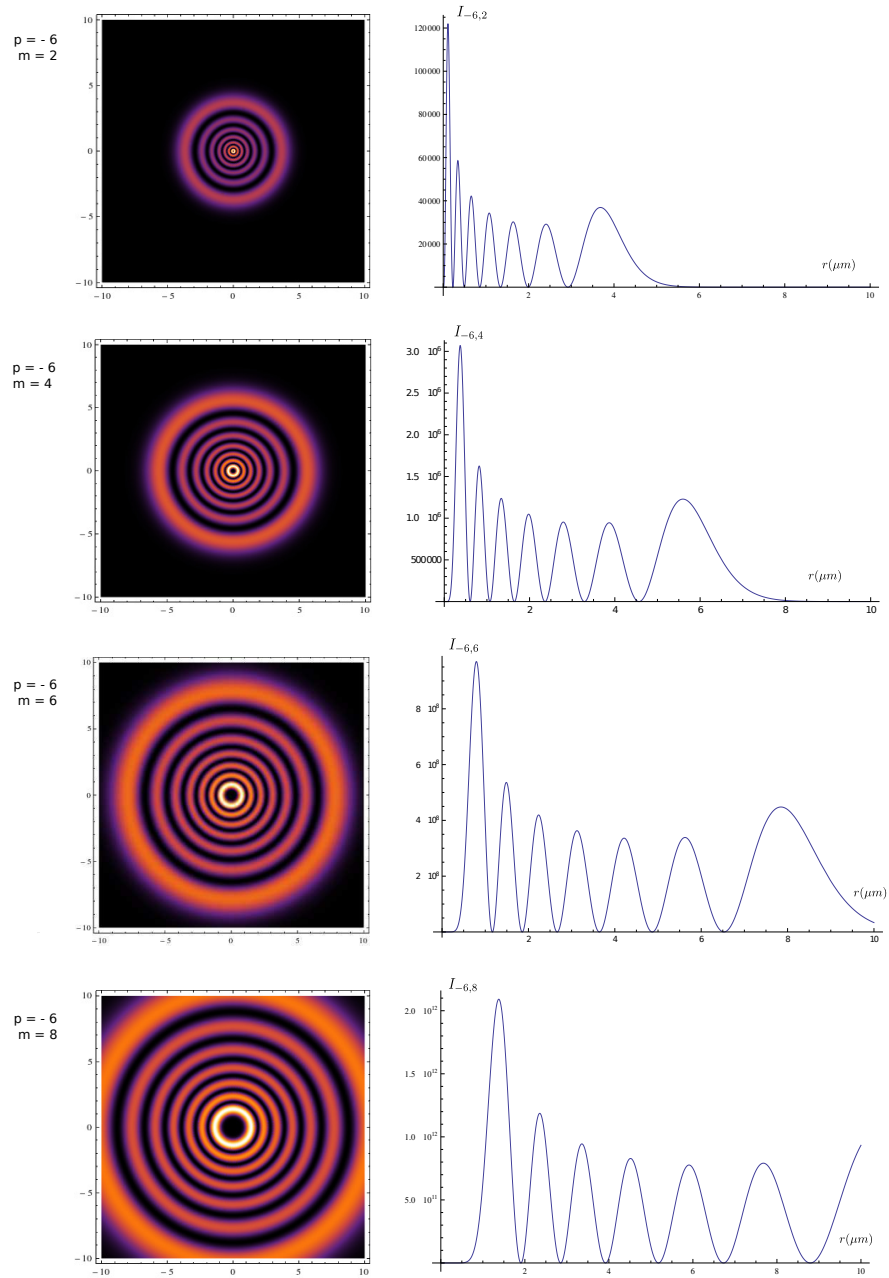


Figura 3.9: Perfil de intensidade da solução Hipergeométrica para  $p = -6$  e diversos valores de  $m$ . Para um mesmo valor de  $p$ , quanto maior a carga topológica,  $m$ , maior o espaçamento entre os picos de intensidade.

### 3.5 Taxa de Transmissão de Dados

#### 3.5.1 Tempo de propagação

Para calcular a taxa de transmissão de dados de uma fibra é necessário calcular o tempo de propagação de um pulso gaussiano através desta fibra. Para uma guia de comprimento  $L$ , o tempo de propagação de um pulso,  $\Delta\tau$ , é calculado em 3.25 utilizando a velocidade

de grupo.

$$\Delta\tau = L \left( \frac{1}{v_g} \right) \quad (3.25)$$

Quando diversos modos são transmitidos dentro da guia o tempo de propagação do pulso leva em consideração a menor e a maior carga topológica,  $m = 1$  e  $m = m_{max}$ .

$$\Delta\tau = L \left( \frac{1}{(v_g)_1} - \frac{1}{(v_g)_{m_{max}}} \right) \quad (3.26)$$

Por sua vez, a velocidade de grupo pode ser aproximada pela inversa da derivada dos números de onda,  $\beta$  e  $k$ .

$$v_g = \frac{\partial\beta^{-1}}{\partial\omega} = c \frac{\partial\beta^{-1}}{\partial k} \quad (3.27)$$

Desta forma, para se obter a taxa de transmissão de dados basta se obter a relação entre  $\beta$  e  $k$  e deriva-la.

### 3.5.2 Solução Hipergeométrica

Para que a solução hipergeométrica 3.15a se propague na **hyper-fiber** é necessário que o parâmetro  $p$ , definido em 3.16a satisfaça a condição 3.18a.

O parâmetro  $p$ , definido em 3.16a permite relacionar os números de onda  $\beta$  e  $k$  de acordo com a equação de dispersão 3.21a. Simplificando 3.21a obtém-se 3.28.

$$\beta = k \sqrt{1 + \frac{k^2 n_1^2}{n_0^2 (1 + m - 2p)^2}} \quad (3.28)$$

A partir da equação 3.28 pode-se calcular o tempo de propagação de um pulso monomodo 3.29a e multimodo 3.29b.

$$\Delta\tau = \frac{L}{c} \left( \frac{2k^2n_1^2 + n_0^2(1+2m-2p)^2}{n_0^2(1+2m-2p)^2 \sqrt{1 + \frac{k^2n_1^2}{n_0^2(1+2m-2p)^2}}} \right) \quad (3.29a)$$

$$\Delta\tau = \frac{L}{c} \left( \frac{2k^2n_1^2 + n_0^2(3-2p)^2}{n_0^2(3-2p)^2 \sqrt{1 + \frac{k^2n_1^2}{n_0^2(3-2p)^2}}} - \frac{2k^2n_1^2 + n_0^2(1+2m_{max}-2p)^2}{n_0^2(1+2m_{max}-2p)^2 \sqrt{1 + \frac{k^2n_1^2}{n_0^2(1+2m_{max}-2p)^2}}} \right) \quad (3.29b)$$

### 3.5.3 Solução Laguerre

Para a solução Laguerre, a relação entre  $\beta$  e  $k$ , 3.30, também é obtida da equação de dispersão, 3.21b.

$$\beta = k \sqrt{1 + \frac{k^2n_1^2}{n_0^2(1+m+2p)^2}} \quad (3.30)$$

Com a relação entre  $\beta$  e  $k$  dos polinômios de Laguerre, pode-se calcular o tempo de propagação de um pulso monomodo 3.31a e multimodo 3.31b.

$$\Delta\tau = \frac{L}{c} \left( \frac{2k^2n_1^2 + n_0^2(1+2m+2p)^2}{n_0^2(1+2m+2p)^2 \sqrt{1 + \frac{k^2n_1^2}{n_0^2(1+2m+2p)^2}}} \right) \quad (3.31a)$$

$$\Delta\tau = \frac{L}{c} \left( \frac{2k^2n_1^2 + n_0^2(3+2p)^2}{n_0^2(3+2p)^2 \sqrt{1 + \frac{k^2n_1^2}{n_0^2(3+2p)^2}}} - \frac{2k^2n_1^2 + n_0^2(1+2m_{max}+2p)^2}{n_0^2(1+2m_{max}+2p)^2 \sqrt{1 + \frac{k^2n_1^2}{n_0^2(1+2m_{max}+2p)^2}}} \right) \quad (3.31b)$$

### 3.5.4 Análise dos Resultados

Para avaliar a taxa de transmissão devido as duas soluções, é necessário atribuir valores as constantes da equação. A tabela 3.2 apresenta valores utilizados nas equações 3.29a e 3.31a para avaliar a taxa de transmissão de dados.

$p_h$	$p_L$	$m$	$n_0$	$n_1$	$\lambda$	$c$	$L$
-4	4	6	1,5	1,1 $\mu m$	1 $\mu m$	$3 \times 10^5$ km/s	1 km

Tabela 3.2: Valores das constantes das equações 3.29 e 3.31 utilizados na avaliação do tempo de propagação das soluções hipergeométrica e Laguerre.

Para a solução hipergeométrica, o tempo de propagação obtido com os valores da tabela 3.2 é aproximadamente igual a  $3,852 \times 10^{-6}$  s. Para a solução dada pelos polinômios de Laguerre, o tempo de propagação obtido também é aproximadamente igual a  $3,852 \times 10^{-6}$  s. A taxa de transmissão de dados neste caso, será de:

$$B_h = B_L = \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{1}{3,852 \times 10^{-6}} = 259605 \text{ bits/s} \quad (3.32)$$

Para entender a relação do tempo de propagação com a carga topológica,  $m$ , e a constante  $p$ , foram traçados os gráfico 3.10 e 3.11.

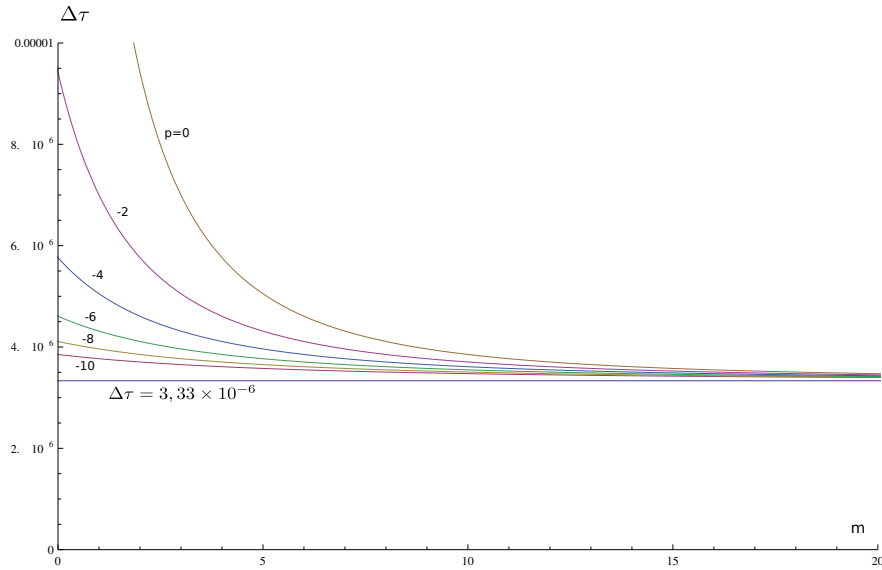


Figura 3.10: Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano para solução hipergeométrica em função de  $m$  e  $p$ . O limite mínimo para o tempo de propagação é de  $3,33 \times 10^{-6}$ .

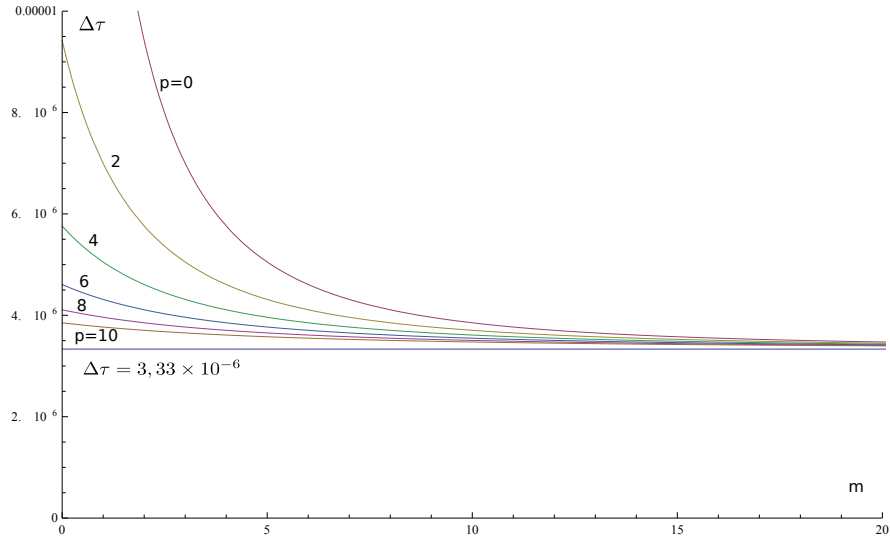


Figura 3.11: Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano para solução Laguerre em função de  $m$  e  $p$ . O limite mínimo para o tempo de propagação é de  $3,33 \times 10^{-6}$ .

Quando  $p_h = -p_L$  as curvas descritas nas figuras 3.10 e 3.11 são equivalentes.

A medida que  $m \rightarrow \infty$  o tempo de propagação tende a  $3,33 \times 10^{-6}$  s, independentemente do valor de  $p$ . Este valor é válido para as duas soluções, a solução hipergeométrica e a solução Laguerre. Logo, a maior taxa de transmissão permitida para um único modo é dada por 3.33.

$$B_{max} = \frac{1}{3,33 \times 10^{-6}} = 300000 \text{ bits/s} \quad (3.33)$$

Para a propagação de diversos modos na solução hipergeométrica a relação entre o tempo de propagação e as constantes  $m$  e  $p$  pode ser observada na figura 3.12. Para a solução Laguerre, a mesma relação pode ser vista na figura 3.13.



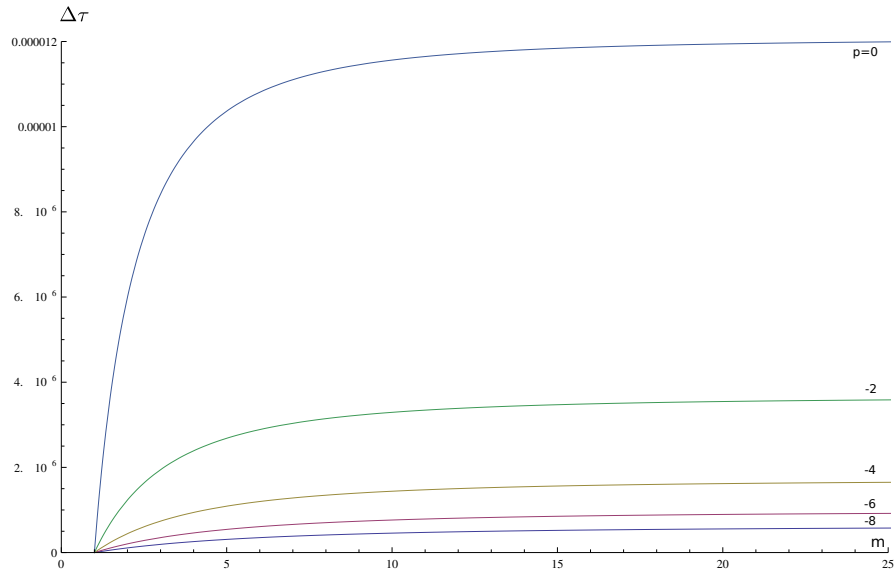


Figura 3.12: Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano multimodo para solução hipergeométrica em função de  $m$  e  $p$ .

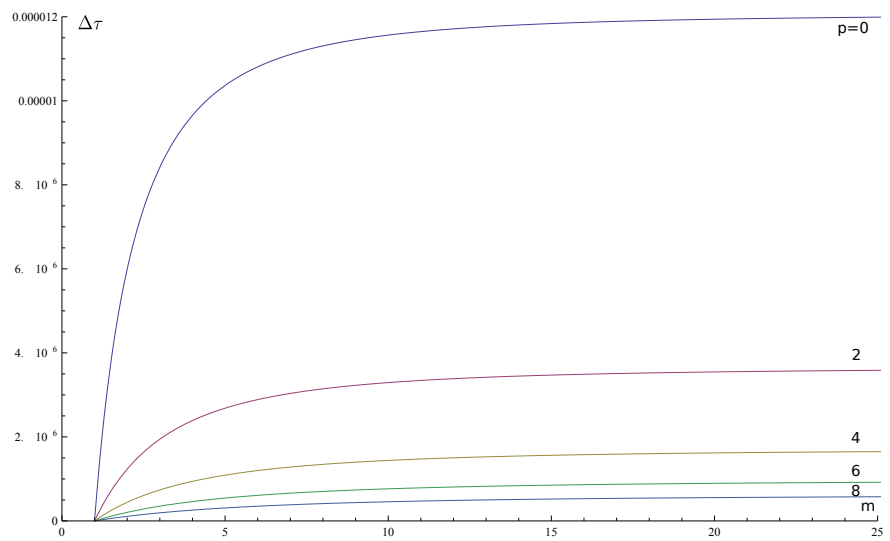


Figura 3.13: Relação do tempo de propagação de um pulso gaussiano multimodo para solução Laguerre em função de  $m$  e  $p$ .

Para a solução hipergeométrica quanto menor o valor de  $p$  menor é o tempo de propagação. Na solução Laguerre quanto maior o valor de  $p$ , menor o tempo de propagação.

## Capítulo 4

# A Fibra Vortex

Esta parte do trabalho apresenta o modelo matemático de uma fibra ótica desenvolvida para otimizar a propagação de ondas eletromagnéticas portadoras de momento angular orbital. Tal fibra foi publicada em (BOZINOVIC; KRISTENSEN; RAMACHANDRAN, 2011) e foi chamada de *Vortex Fiber* em tradução livre: fibra vórtex.

Ondas eletromagnéticas portadoras de MAO não se propagam por longas distâncias em fibras óticas convencionais apresentando um grande acoplamento inter-modal, (MC-GLOIN; SIMPSON; PADGETT, 1998), (DASHTI; ALHASSEN; LEE, 2006), (BOZINOVIC et al., 2012) e (WONG et al., 2012). Por isso existe a necessidade de se desenvolver fibras que permitam a propagação de ondas EM com MAO. O artigo (BOZINOVIC et al., 2013) apresentou resultados experimentais, onde foi alcançada uma taxa de transmissão de dados de 1,6 Tera-bits sobre uma fibra vórtex de 1,1 km.

### 4.1 Propriedades da Fibra Vórtex

A figura 4.1 representa o índice de refração da fibra vórtex em função de seu raio.

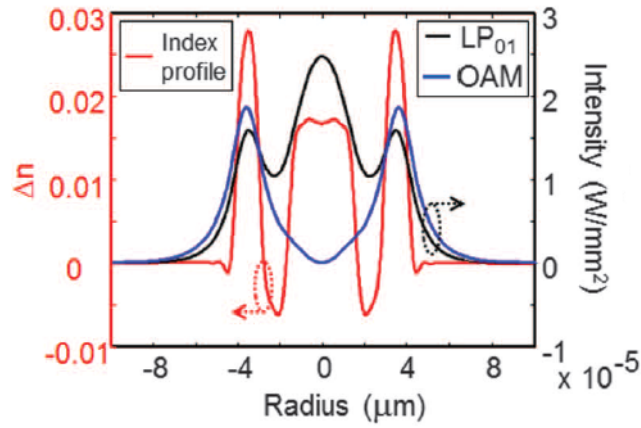


Figura 4.1: Índice de refração da fibra vórtex em função do raio. Fonte: (BOZINOVIC et al., 2013).

A figura 4.2 apresenta o perfil transversal da fibra. A região mais clara possui valores maiores de índice de refração.

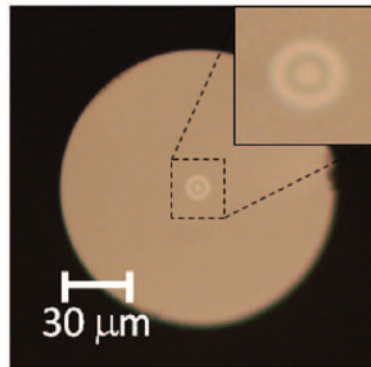


Figura 4.2: Perspectiva transversal da fibra vórtex. Regiões mais claras possuem maior índice de refração. Fonte: (BOZINOVIC et al., 2013).

A partir do gráfico 4.1, foi possível inferir os dados do índice de refração da fibra. A tabela 4.1 mostra alguns pontos que relacionam o raio com o índice de refração da fibra.

r	-4,5	-3,75	-2,75	-2	-1	0	1	2	2,75	3,75	4,5
n	0	0,03	0	-0,00525	0,0175	0,017	0,0175	-0,00525	0	0,03	0

Tabela 4.1: Índice de refração em função do raio (r em  $10^{-6}$  m)

Baseando-se nesses pontos foi possível definir uma função algébrica que se aproxima dos valores reais do índice de refração da fibra vórtex. O modelo algébrico foi definido por 4 pulsos gaussianos.

$$\eta(r) = \eta_0 + A_1 e^{-2\left(\frac{r}{w_1}\right)^i} + A_2 e^{-\left(\frac{r-d_1}{w_2}\right)^j} + A_3 e^{-\left(\frac{r+d_2}{w_3}\right)^j} - A_4 e^{-2\left(\frac{r}{w_4}\right)^i} \quad (4.1)$$

Na equação 4.1,  $\eta_0$  é o índice de refração para  $r \rightarrow \infty$ . A tabela 4.2 apresenta os valores das constantes que foram utilizadas neste trabalho.

$\eta_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$d_1$	$d_2$
1,448	0,024	0,03	0,03	0,0065	$3,65 \times 10^{-5}$	$3,65 \times 10^{-5}$

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$i$	$j$
$1,85 \times 10^{-5}$	$0,37 \times 10^{-5}$	$0,37 \times 10^{-5}$	$2,59 \times 10^{-5}$	8	2

Tabela 4.2: Constantes da equação 4.1.

Substituindo os valores da tabela 4.2 na equação 4.1 obtém-se 4.2.

$$\eta(r) = 1,448 + 0,024 e^{-2\left(\frac{r}{1,85 \times 10^{-5}}\right)^8} + 0,03 e^{-\left(\frac{r-3,65 \times 10^{-5}}{0,37 \times 10^{-5}}\right)^2} + 0,03 e^{-\left(\frac{r+3,65 \times 10^{-5}}{0,37 \times 10^{-5}}\right)^2} - 0,0065 e^{-2\left(\frac{r}{2,59 \times 10^{-5}}\right)^8} \quad (4.2)$$

A representação gráfica do da equação 4.2 pode ser observada na figura 4.3.

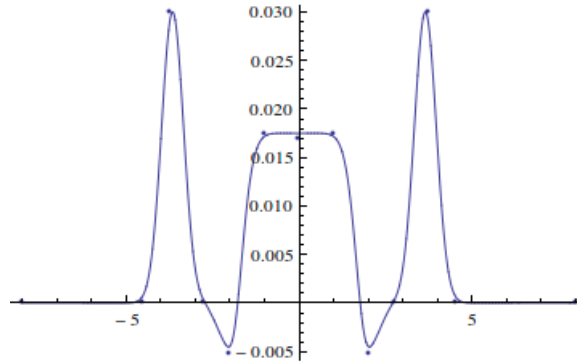


Figura 4.3: Representação gráfica do modelo algébrico do índice de refração da fibra vórtex ( $r$  em  $10^{-6}$  m)

## 4.2 Solução da Equação de Helmholtz

Com o valor do índice de refração definido é possível calcular a solução da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.

Inicialmente, define-se as componentes transversais do campo elétrico. Para coordenadas cilíndricas essas componentes espaciais são:

$$\vec{E} = E_r \hat{\rho} + E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{z} \quad (4.3)$$

Adotando-se o eixo z como eixo de propagação da onda e supondo que a mesma possui momento angular orbital, cada componente espacial apresenta a seguinte forma:

$$E_r(r, \phi, z) = A_r(r) e^{jm\phi} e^{-i\beta z} \quad (4.4a)$$

$$E_\phi(r, \phi, z) = A_\phi(r) e^{jm\phi} e^{-i\beta z} \quad (4.4b)$$

$$E_z(r, \phi, z) = A_z(r) e^{jm\phi} e^{-i\beta z} \quad (4.4c)$$

A partir da equação vetorial e harmônica de Helmholtz, 3.7, e definindo-se o número de onda  $k = \frac{\omega}{c}$ , obtém-se a equação de Helmholtz para a fibra vórtex, 4.5, sendo  $\eta$  definido em 4.2.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \eta^2 \vec{E} = 0 \quad (4.5)$$

Após a aplicação do Laplaciano em 4.5, obtém-se três equações diferenciais uma para cada dimensão espacial (r,  $\phi$ , z). De acordo com (OKAMOTO, 2006), em guias de onda cilíndricos com simetria axial onde o índice de refração depende somente do raio,  $\eta(r)$ , a componente z dos campos elétrico e magnético descrevem completamente a propagação das ondas EM. Em outras palavras as componentes transversais dos campos elétrico e magnético, são obtidas de  $E_z$  e  $H_z$ . Esta relação é definida pelas equações 4.6a, 4.6b, 4.6c e 4.6d.

$$E_r = -\frac{j}{k^2 \eta^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu_0}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad (4.6a)$$

$$E_\phi = -\frac{j}{k^2 \eta^2 - \beta^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (4.6b)$$

$$H_r = -\frac{j}{k^2 \eta^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega \varepsilon_0 \eta^2}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \quad (4.6c)$$

$$H_\phi = -\frac{j}{k^2 \eta^2 - \beta^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \omega \varepsilon_0 \eta^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (4.6d)$$

A equação 4.7 descreve a componente em z obtida da aplicação do Laplaciano em 4.5.

$$e^{i(z\beta+m\phi)}(k^2(0,024e^{-0,014576r^8} - 0,0065e^{-0,0009877r^8} + \eta_0)^2 A_z(r) - \frac{m^2}{r^2} A_z(r) + \frac{1}{r} A'_z(r) + A''_z(r)) = 0 \quad (4.7)$$

O termo  $e^{i(\beta z+m\phi)}$  é desprezado, pois o mesmo representa sinais harmônicos nas dimensões  $\phi$  e  $z$ . Logo, para obter a solução, basta solucionar a equação 4.8.

$$k^2(0,024e^{-0,014576r^8} - 0,0065e^{-0,0009877r^8} + \eta_0)^2 A_z(r) - \frac{m^2}{r^2} A_z(r) + \frac{1}{r} A'_z(r) + A''_z(r) = 0 \quad (4.8)$$

Observa-se que 4.8 depende apenas do raio, logo a equação entre parênteses é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). A EDO 4.8 é linear porque todas as suas derivadas possuem expoente 1 e é de ordem 2 porque a maior derivada é de segunda ordem.

Analisando o termo 4.9, observa-se o comportamento apresentado na figura 4.4.

$$0,024e^{-0,014576r^8} - 0,0065e^{-0,0009877r^8} + n_0 = \eta_{ef} \quad (4.9)$$

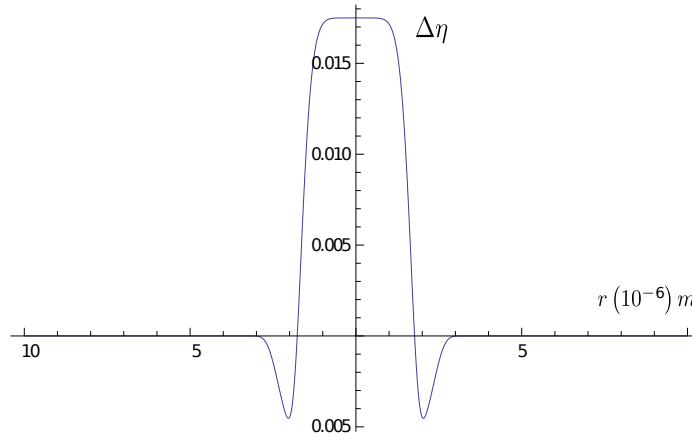


Figura 4.4: Representação gráfica da variação do índice de refração em função do raio da fibra. Equação 4.9. O valor de referência do índice de refração é nulo, ( $n_0 = 0$ ).

Neste trabalho chamaremos o termo 4.9 de índice eficaz  $\eta_{ef}$ . Para solucionar a equação diferencial 4.8, dividiu-se o índice eficaz em 3 regiões onde o índice eficaz é um valor

constante.

$$0 < r < R_1 \Rightarrow \eta_{ef1} = \eta_0 + \eta_1 \quad (4.10a)$$

$$R_1 \leq r < R_2 \Rightarrow \eta_{ef2} = \eta_0 - \eta_2 \quad (4.10b)$$

$$R_2 \leq r < \infty \Rightarrow \eta_{ef3} = \eta_0 \quad (4.10c)$$

A divisão do índice de refração em três regiões é uma aproximação feita em fibras de múltiplos *claddings*. O artigo de (KAWAKAMI; NISHIDA, 1974) apresenta uma aproximação para uma fibra de um *core* e dois *claddings* e (BARAKE, 1997) apresenta um modelo genérico para fibras de um *core* e de até três *claddings*.

Neste trabalho utilizaremos os valores definidos na tabela 4.3.

$R_1$	$R_2$	$\eta_0$	$\eta_1$	$\eta_2$
$1,78 \times 10^{-6}$	$2,9 \times 10^{-6}$	1,448	0,0175	0,0045

Tabela 4.3: Constantes que delimitam os limites do índice de refração da equação 4.9.

A figura 4.5 representa graficamente os valores limítrofes de cada uma das regiões. Já a figura 4.6 representa os valores do índice eficaz em cada uma dessas regiões.

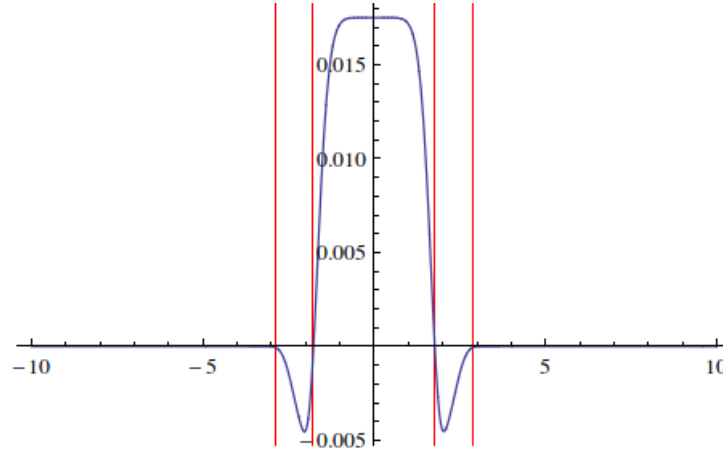


Figura 4.5: Limites entre as três regiões do índice eficaz da fibra vórtex definidas pelas constantes  $R_1$  e  $R_2$ . ( $n_0 = 0$  e  $r$  em  $10^{-6}$  m)

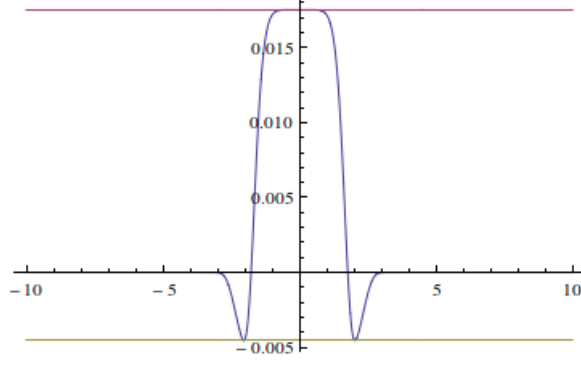


Figura 4.6: Valores do índice eficaz nas três regiões da fibra vórtice. ( $n_0 = 0$  e  $r$  em  $10^{-6}\text{m}$ )

Desta forma, cada uma dessas regiões apresenta uma EDO linear diferente. Substituindo o índice eficaz em 4.8, obtém-se a EDO 4.11.

$$\left(k^2\eta_{ef}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) A_z(r) + \frac{1}{r}A'_z(r) + A''_z(r) = 0 \quad (4.11)$$

A EDO 4.11 é conhecida como equação diferencial de Bessel, 4.12.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (4.12)$$

As soluções da equação 4.12 são as bem conhecidas funções de Bessel, 4.13.

$$\begin{cases} A_z(r) = C_1J_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef}^2 - \beta^2}\right) + C_2Y_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef}^2 - \beta^2}\right), & k\eta > \beta \\ A_z(r) = C_3I_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef}^2 - \beta^2}\right) + C_4K_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef}^2 - \beta^2}\right), & k\eta < \beta \end{cases} \quad (4.13)$$

As funções  $J_m$  e  $Y_m$  são as funções de Bessel do primeiro e segundo tipo, enquanto as funções  $I_m$  e  $K_m$  são as funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes que determinam a amplitude do sinal.

De acordo com (KAWAKAMI; NISHIDA, 1974), para que um feixe possa se propagar no interior da fibra, o número de onda transversal,  $\beta$ , deve estar entre os limites definidos em 4.14, onde  $\eta_3$  é o índice de refração da camada mais externa.

$$k\eta_{max} > \beta > k\eta_3 \quad (4.14)$$

As soluções possíveis para cada região da fibra são obtidas considerando o valor do índice de refração em cada uma das regiões, 4.3, a restrição de  $\beta$ , 4.14, e as soluções



possíveis da equação diferencial de Bessel, 4.13.

A primeira região possui o maior valor do índice de refração logo a solução deve ser dada pelas funções de Bessel do primeiro e segundo tipo. As funções de Bessel do primeiro tipo  $J_m(x)$  e do segundo tipo  $Y_m(x)$  não são definidas no intervalo  $-\infty < x < 0$ . A Bessel do segundo tipo  $Y_m(x)$  tende a  $-\infty$  quando  $x \rightarrow 0$ , logo a função de Bessel do segundo tipo não pode ser solução na primeira região, 4.10a, da fibra vórtex.

As segunda e terceira regiões são descritas pelas funções de Bessel modificadas do primeiro e segundo tipo,  $I_m$  e  $K_m$ . A segunda região não apresenta nenhuma restrição relativa as funções de Bessel modificadas. Contudo, a terceira região só pode ser descrita pela função de Bessel modificada do segundo tipo,  $K_m$ , visto que esta função é a única que decai exponencialmente na direção radial.

Desta forma, a amplitude do campo elétrico em  $z$  para cada uma das regiões é dada pelo conjunto das equações: 4.15a, 4.15b e 4.15c.

$$\text{região 1} \Rightarrow A_z(r) = C_1 J_m \left( r \sqrt{k^2 \eta_{ef1}^2 - \beta^2} \right) \quad (4.15a)$$

$$\text{região 2} \Rightarrow A_z(r) = C_2 I_m \left( r \sqrt{k^2 \eta_{ef2}^2 - \beta^2} \right) + C_3 K_m \left( r \sqrt{k^2 \eta_{ef2}^2 - \beta^2} \right) \quad (4.15b)$$

$$\text{região 3} \Rightarrow A_z(r) = C_4 K_m \left( r \sqrt{k^2 \eta_{ef3}^2 - \beta^2} \right) \quad (4.15c)$$

Pode-se ainda definir o número de onda transversal, para cada uma das três regiões 4.16.

$$k_{t1} = \sqrt{k^2 \eta_{ef1}^2 - \beta^2} \quad (4.16a)$$

$$k_{t2} = \sqrt{k^2 \eta_{ef2}^2 - \beta^2} \quad (4.16b)$$

$$k_{t3} = \sqrt{k^2 \eta_{ef3}^2 - \beta^2} \quad (4.16c)$$

Reescrevendo o conjunto das equações 4.15a, 4.15b e 4.15c, com o número de onda transversal, 4.16, obtem-se:

$$\text{região 1} \Rightarrow A_z(r) = C_1 J_m (r k_{t1}) \quad (4.17a)$$

$$\text{região 2} \Rightarrow A_z(r) = C_2 I_m (r k_{t2}) + C_3 K_m (r k_{t2}) \quad (4.17b)$$

$$\text{região 3} \Rightarrow A_z(r) = C_4 K_m (r k_{t3}) \quad (4.17c)$$

A solução completa, considerando todas as dimensões espaciais e a dimensão temporal

é dada pelo conjunto das equações 4.18a, 4.18b e 4.18c.

$$\text{região 1} \Rightarrow E_z(r) = C_1 J_m(rk_{t1}) e^{i(z\beta+m\phi-\omega t)} \quad (4.18a)$$

$$\text{região 2} \Rightarrow E_z(r) = (C_2 I_m(rk_{t2}) + C_3 K_m(rk_{t2})) e^{i(z\beta+m\phi-\omega t)} \quad (4.18b)$$

$$\text{região 3} \Rightarrow E_z(r) = C_4 K_m(rk_{t3}) e^{i(z\beta+m\phi-\omega t)} \quad (4.18c)$$

### 4.3 Equação de Dispersão

Simplificando o termo 4.9 em três regiões de valores constantes possibilita analisar a fibra vórtex da mesma maneira que uma fibra do tipo *step* é analisada. As condições de contorno das fibras *step* são definidas pelas igualdades 4.19a e 4.19b, onde os índices “1” e “2” são as regiões de *core* e *cladding*, respectivamente e “a” é a distância entre o centro da fibra e a superfície de contato entre o *core* e o *cladding*.

$$E_{z1}(a) = E_{z2}(a) \quad (4.19a)$$

$$H_{\phi1}(a) = H_{\phi2}(a) \quad (4.19b)$$

Para o caso da fibra vórtex ainda existe uma segunda condição de contorno, pois existem três regiões com valores distintos de índice de refração. Desta forma, existe uma segunda restrição dada pelas equações 4.20a e 4.20b. Os índices “2” e “3” representam as regiões definidas anteriormente e “b” é a distância entre o centro da fibra e a superfície de contato entre as regiões “2” e “3”.

$$E_{z2}(b) = E_{z3}(b) \quad (4.20a)$$

$$H_{\phi2}(b) = H_{\phi3}(b) \quad (4.20b)$$

A partir da primeira condição de contorno, 4.19, e sabendo que  $H_\phi$  é diretamente proporcional a primeira derivada de  $E_z$  obtém-se 4.21a e 4.21b. Utilizando a segunda condição de contorno, 4.20, obtém-se 4.21c e 4.21d.

$$C_1 J_m(ak_{t1}) = C_2 I_m(ak_{t2}) + C_3 K_m(ak_{t2}) \quad (4.21a)$$

$$C_1 J'_m(rk_{t1})|_{r=a} = C_2 I'_m(rk_{t2})|_{r=a} + C_3 K'_m(rk_{t2})|_{r=a} \quad (4.21b)$$

$$C_2 I_m(ak_{t2}) + C_3 K_m(ak_{t2}) = C_4 J_m(ak_{t3}) \quad (4.21c)$$

$$C_2 I'_m(rk_{t2})|_{r=b} + C_3 K'_m(rk_{t2})|_{r=b} = C_4 J'_m(rk_{t3})|_{r=b} \quad (4.21d)$$

As constantes que definem a amplitude do feixe podem ser escritas em função da amplitude no core,  $C_1$ .

$$C_2 = \frac{J_m(ak_{t1})}{I_m(ak_{t2})} \frac{\left( \frac{J'_m(rk_{t1})|_{r=a}}{J_m(ak_{t1})} - \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{K_m(ak_{t2})} \right)}{\left( \frac{I'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{I_m(ak_{t2})} - \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{K_m(ak_{t2})} \right)} C_1 \quad (4.22a)$$

$$C_3 = \frac{J_m(ak_{t1})}{K_m(ak_{t2})} \frac{\left( \frac{J'_m(rk_{t1})|_{r=a}}{J_m(ak_{t1})} - \frac{I'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{I_m(ak_{t2})} \right)}{\left( \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{K_m(ak_{t2})} - \frac{I'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{I_m(ak_{t2})} \right)} C_1 \quad (4.22b)$$

$$C_4 = \frac{I_m(bk_{t2})}{K_m(bk_{t3})} \frac{\left( \frac{I'_m(rk_{t2})|_{r=b}}{I_m(bk_{t2})} - \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=b}}{K_m(bk_{t2})} \right)}{\left( \frac{K'_m(rk_{t3})|_{r=b}}{K_m(bk_{t3})} - \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=b}}{K_m(bk_{t2})} \right)} C_1 \quad (4.22c)$$

Para se obter a equação de dispersão é necessário eliminar as constantes. Para que isso ocorra vamos dividir a equação 4.21c pela equação 4.21d e a equação 4.22a pela equação 4.22b.

$$\frac{C_2}{C_3} = -\frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=b}}{I'_m(rk_{t2})|_{r=b}} \frac{\left( \frac{K_m(bk_{t2})}{K'_m(rk_{t2})|_{r=b}} - \frac{K_m(bk_{t3})}{K'_m(rk_{t3})|_{r=b}} \right)}{\left( \frac{I_m(bk_{t2})}{I'_m(rk_{t2})|_{r=b}} - \frac{K_m(bk_{t3})}{K'_m(rk_{t3})|_{r=b}} \right)} \quad (4.23a)$$

$$\frac{C_2}{C_3} = -\frac{K_m(ak_{t2})}{I_m(ak_{t2})} \frac{\left( \frac{J'_m(rk_{t1})|_{r=a}}{J_m(ak_{t1})} - \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{K_m(ak_{t2})} \right)}{\left( \frac{J'_m(rk_{t1})|_{r=a}}{J_m(ak_{t1})} - \frac{I'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{I_m(ak_{t2})} \right)} \quad (4.23b)$$

Igualando e rearranjando as equações 4.23 obtém-se 4.24.

$$\frac{I_m(ak_{t2})}{I'_m(rk_{t2})|_{r=b}} \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=b}}{K_m(ak_{t2})} = \quad (4.24)$$

$$\frac{\left( \frac{J'_m(rk_{t1})|_{r=a}}{J_m(ak_{t1})} - \frac{K'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{K_m(ak_{t2})} \right) \times \left( \frac{I_m(bk_{t2})}{I'_m(rk_{t2})|_{r=b}} - \frac{K_m(bk_{t3})}{K'_m(rk_{t3})|_{r=b}} \right)}{\left( \frac{J'_m(rk_{t1})|_{r=a}}{J_m(ak_{t1})} - \frac{I'_m(rk_{t2})|_{r=a}}{I_m(ak_{t2})} \right) \times \left( \frac{K_m(bk_{t2})}{K'_m(rk_{t2})|_{r=b}} - \frac{K_m(bk_{t3})}{K'_m(rk_{t3})|_{r=b}} \right)}$$

A equação 4.24 é uma equação de dispersão, também chamada de equação de autovalor. Esta equação é independente das constantes que definem a amplitude do feixe.

Como os valores de  $kt$  estão relacionados com  $\beta$  e  $k$  segundo as equações 4.16, pode-se expressar 4.24 em função dessas duas variáveis.

$$\frac{I_m\left(a\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)}{I'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)|_{r=b}} \frac{K'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)|_{r=b}}{K_m\left(a\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)} = \quad (4.25)$$

$$\frac{\left( \frac{J'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef1}^2 - \beta^2}\right)|_{r=a}}{J_m\left(a\sqrt{k^2\eta_{ef1}^2 - \beta^2}\right)} - \frac{K'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)|_{r=a}}{K_m\left(a\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)} \right)}{\left( \frac{J'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef1}^2 - \beta^2}\right)|_{r=a}}{J_m\left(a\sqrt{k^2\eta_{ef1}^2 - \beta^2}\right)} - \frac{I'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)|_{r=a}}{I_m\left(a\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)} \right)} \times$$

$$\frac{\left( \frac{I_m\left(b\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)}{I'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)|_{r=b}} - \frac{K_m\left(b\sqrt{k^2\eta_{ef3}^2 - \beta^2}\right)}{K'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef3}^2 - \beta^2}\right)|_{r=b}} \right)}{\left( \frac{K_m\left(b\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)}{K'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef2}^2 - \beta^2}\right)|_{r=b}} - \frac{K_m\left(b\sqrt{k^2\eta_{ef3}^2 - \beta^2}\right)}{K'_m\left(r\sqrt{k^2\eta_{ef3}^2 - \beta^2}\right)|_{r=b}} \right)}$$

A equação 4.25 é uma equação transcendente não apresentando solução algébrica. Contudo é possível se obter uma solução numérica e avaliar a taxa de transmissão de dados da **vortex-fiber**.

## 4.4 Taxa de Transmissão de Dados

A dispersão é uma grandeza importante de uma guia de onda. Essa grandeza é uma das principais fontes limitadoras da taxa de transmissão de dados. A equação de dispersão, 4.25, obtida na seção anterior será utilizada para avaliar a taxa de transmissão de dados da fibra vórtex. Por ser uma equação transcendente, cuja solução não é dada por funções elementares, é necessário recorrer a métodos numéricos para se obter a sua solução.

### 4.4.1 Constante de Propagação e a Taxa de Transmissão

Para se obter a taxa de transmissão de uma guia de onda é necessário calcular o tempo de propagação,  $t_p$ , também conhecido como dispersão do pulso. Esta relação é definida em 4.26, onde  $L$  é a distância de propagação,  $v_g$  é a velocidade de grupo,  $\beta$  é a constante de propagação e  $\omega$  a frequência angular do sinal.

$$t_p = \frac{L}{v_g} = L \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + L (\omega - \omega_0) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (4.26)$$

De acordo com (OKAMOTO, 2006) o primeiro termo,  $L \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$  apresenta o maior peso nas guias multimodo, podendo-se desprezar o segundo termo. Além disso, o primeiro termo é equivalente a derivada  $\frac{\partial \beta}{\partial k}$ , logo a relação 4.27 é válida.

$$t_p \simeq L \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \equiv \frac{L}{c} \frac{\partial \beta}{\partial k} \Big|_{k=k_0} \quad (4.27)$$

Desta forma, para se obter o tempo de propagação,  $t_p$ , basta calcular a derivada da constante de propagação em função do número de onda,  $\frac{\partial \beta}{\partial k}$ .

### 4.4.2 Curva de Dispersão

Utilizando os parâmetros da fibra vórtex definidos na tabela 4.3 e para uma carga topológica de  $m = 1$ , é possível representar graficamente a equação de dispersão. A função **ContourPlot** do *software Mathematica* foi utilizada para traçar o gráfico da equação de dispersão, 4.25.

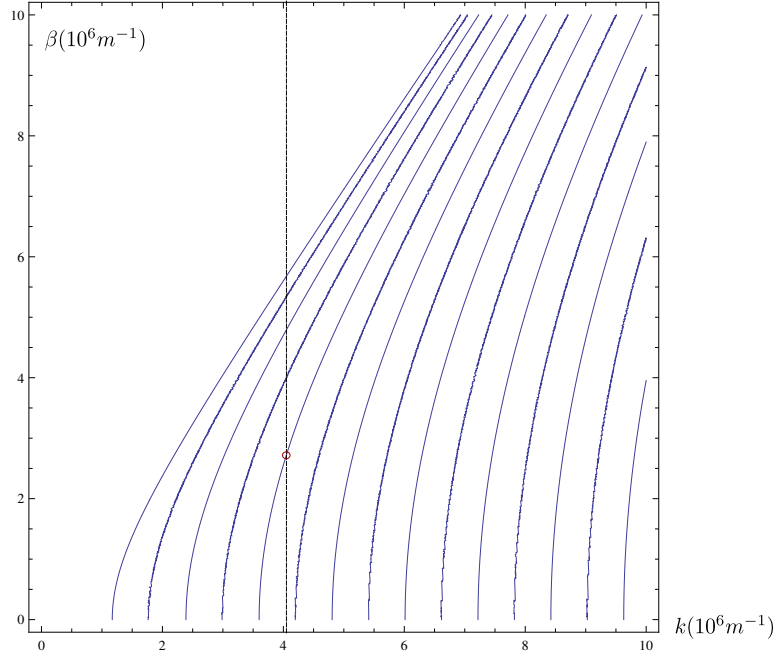


Figura 4.7: Curva de dispersão. Descreve a relação da constante de propagação  $\beta$  em função do número de onda  $k$ . A reta vertical representa o valor do número de onda  $k$  utilizado no artigo de referência, (BOZINOVIC et al., 2013)

O gráfico 4.7 é conhecido como curva de dispersão e relaciona a constante de propagação  $\beta$  de um feixe como seu número de onda,  $k$ .

A partir do comprimento de onda,  $\lambda$ , obtido do artigo (BOZINOVIC et al., 2013) é possível obter o número de onda utilizado nos experimentos descritos pelo artigo.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1,55 \times 10^{-6}} = 4,0537 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \quad (4.28)$$

A reta tracejada na figura 4.7 passa por  $k = 4,0537 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ , logo, os pontos de interseção desta reta e a curva de dispersão são os valores possíveis que  $\beta$  pode assumir. Para efeito de cálculo utilizaremos a primeira interseção da reta com a curva de dispersão.

#### 4.4.3 Taxa de Transmissão

Através da curva de dispersão foram obtidos dois pontos próximos ao valor de  $k = 4,0537 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ .

$$\begin{cases} \beta(4,002 \times 10^6) = 2,524 \times 10^6 \\ \beta(4,105 \times 10^6) = 2,87 \times 10^6 \end{cases} \quad (4.29)$$

Com os valores de 4.29 foi possível calcular a derivada  $\frac{\partial\beta}{\partial k}$  de acordo com 4.30.

$$\frac{\partial\beta}{\partial k} = \frac{2,87 - 2,524}{4,105 - 4,002} = 3,35922 \quad (4.30)$$

O valor de 4.30 é então substituído em 4.27 para obtenção do tempo de propagação. Considerando a distância de propagação do artigo (BOZINOVIC et al., 2013)  $L = 1,1km$  e a velocidade de luz como  $c = 300.000 km/s$ , obtém-se 4.31

$$t_p = \frac{1,1}{300000} \times 3,35922 = 12,317 \mu s \quad (4.31)$$

Em (OKAMOTO, 2006) a taxa de transmissão máxima de dados é obtida por 4.32, contudo é usualmente utilizado em artigos a expressão 4.33.

$$B_{max} = \frac{0,22}{t_p} = 17861,3 \text{ bits/s} \quad (4.32)$$

$$B_{max} = \frac{1}{t_p} = 81187,6 \text{ bits/s} \quad (4.33)$$

## Capítulo 5

# Considerações Finais

### 5.1 Conclusões

A solução apresentada para a **hyper-fiber** é um modelo mais generalizado que o modelo apresentado por (BERNARDO; MORAES, 2011). O modelo aqui apresentado possui uma solução descrita pelos polinômios de Laguerre não presente no modelo descrito em (BERNARDO; MORAES, 2011). Além disso, a solução hipergeométrica é descrita pela função hipergeométrica confluyente do segundo tipo que é mais geral que a função hipergeométrica confluyente do primeiro tipo, apresentada em (BERNARDO; MORAES, 2011). A **hyper-fiber** foi analisada matematicamente, assim como em (BERNARDO; MORAES, 2011). Já que não foram encontrados resultados experimentais em outros artigos não foi possível comprovar o modelo matemático.

Em (BERNARDO; MORAES, 2011) a função hipergeométrica do primeiro tipo, solução da equação de Helmholtz, foi comparada a solução da equação radial de Schrödinger para o átomo de hidrogênio 2D, apresentando um limite superior para o valor da carga topológica,  $m$ . Esta restrição existe em coordenadas esféricas e foi aplicada a **hyper-fiber** de forma errônea visto que a análise da fibra é feita em coordenadas cilíndricas não em coordenadas esféricas. Logo, não existe limite superior para a carga topológica no modelo da **hyper-fiber**.

O parâmetro  $p$  relaciona os números de onda  $\beta$  e  $k$  de acordo com 3.16a e 3.16b. Se os valores de  $p$  forem opostos,  $p_h = -p_L$ , e as cargas topológicas forem iguais, os números de onda longitudinais de cada solução serão iguais,  $\beta_h = \beta_L$ . Neste caso, as soluções hipergeométrica e Laguerre apresentam o mesmo perfil de intensidade e mesma taxa de transmissão de dados. Devido a esta simetria, na prática, apenas o estudo de uma das soluções é suficiente para descrever os feixes que se propagam na **hyper-fiber**. Isso pode ser explicado pelo fato de que a função hipergeométrica confluyente do primeiro tipo pode ser descrita a partir dos polinômios de Laguerre generalizado ou da função hipergeométrica confluyente do segundo tipo. Ou seja, a função hipergeométrica do primeiro tipo é uma



forma degenerada da função hipergeométrica do segundo tipo e dos polinômios de Laguerre generalizado. Para um melhor entendimento vide [Apêndice A - Funções Especiais](#).

Um resultado importante encontrado na análise da **hyper-fiber** é a relação entre o tempo de propagação e o valor da carga topológica  $m$  nos feixes portadores de momento angular orbital. Viu-se que quanto maior a carga topológica menor é o tempo de propagação do feixe. Além disso, feixes de carga topológica muito alta,  $m \rightarrow \infty$ , se propagam como se estivessem no vácuo, ou seja, na velocidade da luz. Também demonstramos que a carga topológica está relacionada com o espaçamento entre os picos de intensidade dos feixes.

O presente trabalho desenvolveu um modelo algébrico da transmissão de dados pelo MAO na fibra vórtex. Como apenas estudos experimentais foram encontrados, não foi possível comparar o modelo matemático desenvolvido. Entretanto, a elaboração deste modelo é vista de forma positiva já que a transmissão de dados através de feixes com MAO é uma área do conhecimento em desenvolvimento.

No que se refere ao tempo de propagação e a taxa de transmissão de dados dos feixes portadores de MAO, as fibras analisadas neste trabalho puderam ser comparadas. O tempo de propagação dos feixes na **hyper-fiber** é menor que o tempo de propagação na fibra vórtex por um fator maior que 3. Isto implica que a taxa de transmissão de dados na **hyper-fiber** é 3 vezes maior que a taxa de transmissão de dados da fibra vórtex. Logo, apesar de ambas serem capazes de transmitir feixes com MAO, a **hyper-fiber** precisaria de menos feixes para transmitir o mesmo número de dados que a fibra vórtex.

## 5.2 Atividades Futuras de Pesquisa

A equação 3.9 é a equação de onda para a propagação de ondas eletromagnéticas em guias com índice de refração de perfil hiperbólico. Para se obter essa equação algumas considerações foram feitas para reduzir a complexidade do problema. As mais importantes considerações foram: o divergente do campo elétrico é nulo,  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , e a permeabilidade magnética relativa foi tomada como uma constante unitária.  $\mu_r = 1$ . Essa equação pode ser reavaliada para se obter um modelo matemático mais preciso.

Poderia-se obter o modelo algébrico da relação entre a carga topológica e o espaçamento entre os picos de intensidade da **hyper-fiber**. O que possibilitaria identificar os feixes em laboratório através de uma calibração.

O desenvolvimento de uma fibra com índice de refração igual ao da **hyper-fiber** e estudos experimentais poderiam comprovar o modelo matemático desenvolvido neste trabalho.

O gráfico da dispersão da fibra vórtex 4.7 foi traçado com a função **ContourPlot** do *software Mathematica* e apresenta algumas curvas ruidosas. O desenvolvimento de um

programa que calcule numericamente o gráfico pode gerar um resultado mais preciso da curva de dispersão.

A taxa de transmissão de dados apresentada em (BOZINOVIC et al., 2013) é o resultado da aplicação de diversas modulações no feixe incidente. O tempo de propagação da fibra vórtex foi avaliado pela propagação de um pulso Gaussiano não levando em consideração qualquer tipo de modulação. Um estudo mais aprofundado sobre a modulação de feixes luminosos e uma comparação com os resultados experimentais poderia indicar a precisão do modelo proposto.

# Referências Bibliográficas

ABRAMOWITZ, M. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 1972.

ALLEN, L.; BEIJERSBERGEN, M. W.; SPREEUW, R. J. C.; WOERDMAN, J. P. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, v. 45, n. 11, p. 8185–8189, Jun 1992.

BARAKE, T. M. *A Generalized Analysis of Multiple-Clad Optical Fibers with Arbitrary Step-Index Profiles and Applications*. Dissertação (Mestrado) — Virginia Polytechnic Institute and State University, April 1997.

BERNARDO, B. d. L.; MORAES, F. Data transmission by hypergeometric modes through a hyperbolic-index medium. *Optics Express*, v. 19, n. 12, p. 11264–11270, May 2011.

BETH, R. A. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. *Phys. Rev.*, v. 50, p. 115–125, Jul 1936. Disponível em: [http://link.aps.org/doi/10-1103/PhysRev.50.115](http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.50.115).

BOZINOVIC, N.; GOLOWICH, S.; KRISTENSEN, P.; S., R. Control of orbital angular momentum of light with optical fibers. *Optics Letters*, v. 37, p. 2451–2453, 2012.

BOZINOVIC, N.; KRISTENSEN, P.; RAMACHANDRAN, S. Long-range fiber-transmission of photons with orbital angular momentum. In: OPTICAL SOCIETY OF AMERICA. *Fiber Plasmons and Vortices (CTuB)*. [S.l.], 2011.

BOZINOVIC, N. et al. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. *Science*, v. 340, n. 6140, p. 1545–1548, June 2013.

DASHTI, P. Z.; ALHASSEN, F.; LEE, H. P. Observation of orbital angular momentum transfer between acoustic and optical vortices in optical fiber. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, n. 4, Feb 2006.

IYANAGA, S. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics: The Mathematical Society of Japan*. 1980.

KAWAKAMI, S.; NISHIDA, S. Characteristics of a doubly clad optical fiber with a low-index inner cladding. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, v. 10, n. 12, p. 879–887, December 1974.

MATHWORLD. *Gamma Function*. 2014. World Wide Web. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>.

MCGLOIN, D.; SIMPSON, N. B.; PADGETT, M. J. Transfer of orbital angular momentum from a stressed fiber-optic waveguide to a light beam. *Applied Optics*, v. 37, p. 469–472, Jan 1998.

NICHOLS, E. F.; HULL, G. F. A preliminary communication on the pressure of heat and light radiation. *Phys. Rev. (Series I)*, v. 13, p. 307–320, Nov 1901. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSeriesI.13.307>.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica 4 - Ótica, Relatividade e Física Quântica*. 1. ed. [S.l.]: Editora Edgard Blücher LTDA, 1998. (Física Básica, v. 4).

OKAMOTO, K. *Fundamentals of Optical Waveguides*. Second edition. [S.l.]: Elsevier, 2006.

THYAGARAJAN, K.; GHATAK, A. *Fiber Optic Essentials*. [S.l.]: Wiley Interscience, 2007.

WONG, G. K. L. et al. Excitation of orbital angular momentum resonances in helically twisted photonic crystal fiber. *Science*, v. 337, p. 446–449, Jul 2012.

YOKOTA, H. et al. Ultra low-loss pure silica core single-mode fiber and transmission experiment. *Optical Fiber Communication*, 1986.

ZWILLINGER, D. *Handbook of Differential Equations*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 1998.

# Apêndice A - Funções Especiais

Na física ou matemática soluções de diversos problemas são descritas por funções bem definidas. Este capítulo apresenta um estudo de algumas dessas funções que foram utilizadas no desenvolvimento do trabalho.

## Função Gama

A função  $\Gamma$ , Gama, ou função Gama completa, ([MATHWORLD, 2014](#)), é utilizada para calcular o fatorial de números reais ou complexos, sendo definida pela integral [5.1](#).

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (5.1)$$

## Polinômio de Laguerre Generalizado

Os polinômios de Laguerre são soluções da equação diferencial de Laguerre, dada por [5.2](#) para  $a$  e  $n$  reais. Vide ([IYANAGA, 1980](#)).

$$xy'' + (a + 1 - x)y' + ny = 0 \quad (5.2)$$

A solução geral da equação [5.2](#) é dada por [5.3](#).

$$y = A {}_1F_1(-n, a + 1, x) + B L_n^a(x) \quad (5.3)$$

Onde  ${}_1F_1(-n, a + 1, x)$  é a função hipergeométrica confluyente do primeiro tipo e  $L_n^a(x)$  é o polinômio de Laguerre generalizado.

Segundo ([ABRAMOWITZ, 1972](#)), para valores de  $a \in \mathbb{C}$  a função generalizada de Laguerre é dada por [5.4](#).

$$L_n^a(x) = \frac{(a + 1)_n}{n!} {}_1F_1(-n; a + 1; x) \quad (5.4)$$

$(a + 1)_n$  é o símbolo de Pochhammer.

$$(a + 1)_n = \frac{\Gamma(a + 1 + n)}{\Gamma(a + 1)} \quad (5.5)$$

Para valores de  $a \in \mathbb{Z}$  o polinômio de Laguerre generalizado 5.4 é conhecido como polinômio associado de Laguerre e é representado por 5.6.

$$L_n^a(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n + a)!}{(n - m)!(a + m)!m!} x^m \quad (5.6)$$

ou por:

$$L_n^a(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \binom{a + n}{n - i} (-x)^i \quad (5.7)$$

Onde  $\binom{a+n}{n-i}$  é o coeficiente binomial, tal que:

$$\binom{a + n}{n - i} = \frac{(a + n)!}{(a + i)!(n - i)!}$$

## Função Hipergeométrica Confluyente do Segundo Tipo

A função hipergeométrica confluyente do segundo tipo é uma solução da equação diferencial hipergeométrica confluyente.

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0 \quad (5.8)$$

Também chamada de equação diferencial de Kummer, (ZWILLINGER, 1998), as soluções desta equação diferencial são chamadas de funções de Kummer do segundo tipo, função de Tricomi ou função de Gordon.

A função hipergeométrica confluyente do segundo tipo é definida por 5.9.

$$\begin{aligned} U(a, b, z) &= \pi \csc(\pi b) \left[ \frac{{}_1F_1(a; b; z)}{\Gamma(a - b + 1)} - \frac{z^{1-b} {}_1F_1(a - b + 1; 2 - b; z)}{\Gamma(a)} \right] \\ &= z^{-a} {}_2F_0(a, 1 + a - b; ; -z^{-1}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Esta função também possui uma representação integral, 5.10.

$$U(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \quad (5.10)$$

A função  ${}_1F_1(a; b; z)$  é a função hipergeométrica do primeiro tipo ou função de Kummer do primeiro tipo. Esta função pode ser expandida como uma série hipergeométrica, [5.11](#).

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (5.11)$$

Onde  $(a)_k$ ,  $(b)_k$  são definidos como os símbolos de Pochhammer:

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+k-1) \quad (5.12)$$

A equação [5.11](#) apresenta um número de polinômios finitos se

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z}_- \\ b \in \mathbb{Z}^* \mid b > 0 \text{ ou } b < a \end{cases} \quad (5.13)$$

Contudo, para  $b < 0$  a equação [5.11](#) é indefinida.

A representação integral da equação [5.11](#) é dada por [5.14](#).

$${}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad (5.14)$$

Muitas funções especiais são derivadas da equação [5.11](#). Como por exemplo pode-se citar as funções de Bessel, polinômios de Laguerre, polinômios de Hermite e a função Gama incompleta, ([ABRAMOWITZ, 1972](#)).